IUP SID
Analyse
2011-2012

Feuille d'exercices 3 : Séries numériques

1 En vrac

Déterminer la nature de la série de terme général u_n, lorsque u_n est égal à :

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}, \quad \frac{n^2}{n^3+1}, \quad \frac{1}{(\log n)^n}, \quad \frac{1}{(\log n)^{\log n}}, \quad \frac{1}{\log(n^2+n+1)}, \quad \frac{n^2}{(1+\delta)^n}, \ (|\delta| < 1/2)$$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}, \quad 1-\cos(\frac{1}{n}), \quad 2^{-\sqrt{n}}, \quad \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$$

2 Examens des années précédentes

2.1 2010

1) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général $u_n = (1+n^8)^{-\alpha}$, $(n \in \mathbb{N})$ est-elle convergente ?
2) Montrer que les séries de terme général u_n défini ci-dessous sont convergentes :
   - $u_n = \dfrac{n^5 n!}{(2n)!}$,
   - $u_n = \dfrac{n^5 \cos(n) \sin(n) \log(n)}{n!}$,
   - $u_n = \dfrac{n^2+4n}{n^4+1}$.

2.2 2009

1) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général $u_n = (1+n^8)^{-\frac{\alpha}{4}}$, $(n \in \mathbb{N})$ est-elle convergente ?
2) Soit ρ un réel donné. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et

$$v_{n+1} = \rho v_n, \ (n \in \mathbb{N}).$$

   Pour quelles valeurs de ρ la série de terme général $(\frac{v_n}{n!})$ est-elle convergente. Déterminer la limite de cette série lorsque $\rho = 1$ et $\rho = -1$.
3) Montrer que les séries associées aux suites suivantes sont convergentes :
   1. $u_n := \dfrac{\cos(n^2)}{n^2}$, $(n > 0)$,
   2. $u_n := \dfrac{\cos(n^4)\sqrt{n}}{n!}$, $(n > 1)$,
   3. $u_n := \dfrac{n^4\sqrt{n}}{2^n}$, $(n > 1)$.

3 2008

1) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général $u_n = (1+n^2)^{-\alpha}$, $(n \in \mathbb{N})$ est-elle convergente ?
2) Soit ρ un réel donné. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et

$$v_{n+1} = \rho v_n, \ (n \in \mathbb{N}).$$

Pour quelles valeurs de ρ la série de terme général (v_n) est-elle convergente. Déterminer la limite de cette série lorsque $\rho = 1/3$.