TD Modèle exponentiel

Probabilités et Statistique

MAF 2011-2012

1 n-échantillon d'une loi de Poisson

On considère $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un n-échantillon d'une loi de Poisson de paramètre θ inconnu, $\theta \in [0, \infty[$.

1) On cherche à estimer θ.

a) L'estimateur $\overline{X} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ est-il sans biais ? Quel est son risque quadratique ?

b) Montrer que, pour tout estimateur $h(X_1, \ldots, X_n)$, il existe un estimateur $\hat{h}(X_1+\ldots+X_n)$ de θ de risque quadratique inférieur : $\overline{X}$ est une statistique exhaustive.

c) Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ?

2) On cherche maintenant à estimer $e^{-l\theta}$, probabilité pour que sur l expériences futures, on observe toujours 0.

a) On propose l'estimateur, $e^{l\overline{X}}$? Est-il sans biais ? Quel est son risque quadratique ?

b) Déterminer une fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(n\overline{X})$ soit un estimateur sans biais. Que se passe-t-il si on prend $n = 1, \;\; l = 2$?

2 Loi de Poisson

Considérons le modèle dominé $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \{\mathcal{P}(\theta), \theta > 0\})^n$ où $\mathcal{P}(\theta)$ est une loi de Poisson de paramètre θ.

a) Montrer que $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ est une statistique exhaustive sans utiliser le Théorème de Neyman-Fisher.

b) A l'aide du Théorème de Neyman-Fisher retrouver ce résultat.

3 Modèle exponentiel

a) Utiliser la propriété de reparamétrisation des familles exponentielles pour calculer dans le cas d'un n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ de loi gaussienne de paramètres μ et σ :

$$\mathbb{E}_\theta(\sum X_i), \mathbb{E}_\theta(\sum X_i^2), \mathrm{Var}_\theta(\sum X_i), \mathrm{Var}_\theta(\sum X_i^2).$$

b) Même question pour le modèle de Rayleigh : $f(x, \theta) = (x/\theta^2) \exp(-x^2/2\theta^2)$, pour $x > 0$ et $\theta > 0$.

4 Modèles exponentiels

Montrer que les distributions suivantes peuvent se mettre sous la forme d'un modèle exponentiel en θ, $\theta > 0$, dont on précisera à chaque fois le paramètre naturel et la satistique exhaustive.

- Loi de Poisson : $P(y = k) = e^{-\theta} \dfrac{\theta^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$.

- Loi binomiale : $P(y=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \theta^k (1-\theta)^{n-k}$, $k = 1, \ldots, n$.
- Loi binomiale négative : $P(y=k) = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \theta^n (1-\theta)^k$, $k \in \mathbb{N}$.
- Loi gamma : $f(x) = \dfrac{\theta^a}{\Gamma(a)} e^{-\theta x} x^{a-1}$, $x > 0$, $a > 0$.
- Loi de Weibull : $f(x) = \theta a x^{a-1} \exp(-\theta x^a)$, $x > 0$, $a > 0$.
- Loi de Pareto : $f(x) = \dfrac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}}$, $a > 0$, $x > a$.

5 Loi log-normale

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires réelles positives, indépendantes de même loi, telle que $\log X_i$ soit distribué selon une loi normale de paramètre θ réel inconnu, et devariance 1.

a) Montrer que $\sum_{i=1}^n \log X_i$ est une statistique exhaustive totale et minimale.
b) Donner une estimateur sans biais de variance minimale de θ.
c) Donner l'information de Fisher du modèle en θ.
d) Donner un estimateur sans biais de e^θ.

6 Loi Hypergéométrique

Pour N et n fixes, on considère $\Theta = \{0, 1, \ldots, N\}$ et la famille $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ des lois hypergéométriques sur $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ donnée par

$$P_\theta(k) = \frac{\begin{pmatrix} \theta \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N-\theta \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}, \quad 0 \leq k \leq \inf(n, \theta).$$

On observe X de loi P_θ. Donner un estimateur uniformément de variance minimale parmi les estimateurs sans biais de θ. Calculer cette variance.

7 Efficacité

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de la loi F_θ. Discuter de l'efficacité de $\overline{X}$ comme estimateur de la moyenne dans les cas suivants : F_θ est la loi $\mathcal{B}(1,\theta)$, $\mathcal{N}(\theta,1)$, $\mathcal{P}(\theta)$, $\mathcal{E}(\theta)$, Géométrique(θ) et enfin $\mathcal{U}([0,\theta])$.

8 Loi de Binomiale

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de la loi $\mathcal{B}(1,\theta)$, $0 < \theta < 1$. On pose $T = \overline{X}(1-\overline{X})$ et $S = \frac{n}{n-1}\overline{X}(1-\overline{X})$. On veut estimer $f(\theta) = \theta(1-\theta)$.

a) Donner un estimateur uniformément de variance minimale parmi les estimateurs sans biais de $f(\theta)$.
b) Quelle est la borne de Cramér-Rao pour les estimateurs sans biais de $f(\theta)$?
c) On veut montrer que $\mathrm{Var}_\theta(S) = \frac{1}{n}\varphi(\theta) + O(n^{-2})$ et calculer $\varphi(\theta)$.
   α) Calculer $E_\theta f(\overline{X})$ et $E_\theta f(\overline{X})^2$ en utilisant la formule de Taylor appliquée à $f(\overline{X}) - f(\theta)$ et $f(\overline{X})^2 - f(\theta)^2$.
   β) Vérifier que $E_\theta(\overline{X}-\theta)^3$ et $E_\theta(\overline{X}-\theta)^4$ sont de l'ordre de $O(n^{-2})$.
   γ) Conclure.
d) Calculer $\mathrm{Var}_\theta(S)$.