IUP SID
Analyse
2010-2011

Examen du 9 Septembre 2011 de 15h45 à 17h45

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont autorisées.

1 Questions de cours

Soit n un entier naturel. Calculer les quantités suivantes :

- $S_n := \sum_{j=0}^{n} C_n^j$.
- $T_n := \sum_{j=0}^{n} jC_n^j$.

Montrer que $(\frac{T_n}{nS_n})$ est une suite constante.

2 Intégration

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$. Calculer les intégrales qui suivent. Dans le cas d'intégrales sur un intervalle non borné, on justifiera pourquoi les intégrales sont finies.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{e^x \mathrm{d}x}{e^{2x}+1}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\mathrm{d}x,\ k = 1, 2, 3.$$

3 Séries

1) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général

$$u_n = (1 + n^2 + n^3 + n^8)^{-\alpha}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

est-elle convergente ?

2) Montrer que les séries de terme général u_n définies ci-dessous sont convergentes :

- $u_n = \dfrac{n^{12} n!}{(2n)!}$,
- $u_n = \dfrac{n^5 \cos(n) \sin(n) \log(\log(n))}{n!}$, $(n \geq 2)$,
- $u_n = \dfrac{n^2 + 4n + 5}{n^4 + n^3 - 2n^2}$, $(n \geq 2)$.