IUP SID
Analyse
2010-2011

Examen du 25 Octobre 2010 de 15h45 à 17h45

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont autorisées.

1 Questions de cours

Soit n un entier naturel. Calculer les quantités suivantes :

- $S_n := \sum_{j=0}^{n} C_n^j 2^{-(j+n)}$. On remarquera que $j-n=-2j-(n-j)$.
- $T_n := \sum_{j=0}^{n} 2^{j-n}$.

Montrer que (S_n) et (T_n) sont des suites convergentes.

2 Intégration

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$. Calculer les intégrales qui suivent. Dans le cas d'intégrales sur un intervalle non borné, on justifiera pourquoi les intégrales sont finies.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x \mathrm{d}x}{e^{2x}+2e^x+5}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\mathrm{d}x, \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|}\mathrm{d}x.$$

3 Séries

1) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général $u_n = (1+n^8)^{-\alpha}$, $(n \in \mathbb{N})$ est-elle convergente ?
2) Montrer que les séries de terme général u_n défini ci-dessous sont convergentes :
   - $u_n = \dfrac{n^5 n!}{(2n)!}$,
   - $u_n = \dfrac{n^5 \cos(n)\sin(n)\log(n)}{n!}$,
   - $u_n = \dfrac{n^2+4n}{n^4+1}$.