

Examen de seconde session

Durée 1h-Aucun document autorisé-Calculatrices scientifiques autorisées

1 Quelques petits calculs

On rappelle que la densité de la loi de Laplace de paramètre $a > 0$ ($\mathcal{L}(a)$) est donnée par

$$f_a(z) := \frac{a}{2} \exp(-a|z|), \quad (z \in \mathbb{R}).$$

Par ailleurs, la densité de la loi exponentielle de paramètre $a > 0$ vaut $a \exp(-ax)$, (pour $x \geq 0$). Le but de cette partie est de faire la plupart des calculs préliminaires utiles dans la partie 2. Ne pas rester bloqué sur les calculs on pourra admettre certains résultats si nécessaire. Soit Z une variable aléatoire de loi de Laplace de paramètre a ($Z \sim \mathcal{L}(a)$). et U une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre a ($U \sim \mathcal{E}(a)$).

1. Montrer que $\mathbb{E}(U) = a^{-1}$ et $\text{Var } U = a^{-2}$.
2. Montrer que $|Z|$ suit la loi exponentielle de paramètre a . En déduire les valeurs de $\mathbb{E}(|Z|)$ et de $\text{Var } |Z|$.

2 Méthode de vraisemblance

Soit $\theta^* > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et Z_1, \dots, Z_n des variables i.i.d. de loi $\mathcal{L}(1/\theta^*)$.

1. Calculer la vraisemblance associée aux observations Z_1, \dots, Z_n .
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ^* . Cet estimateur est-il biaisé? Calcul son risque quadratique.
3. Déterminer l'information de Fisher du modèle. L'estimateur du maximum de vraisemblance est-il efficace?
4. Donner une statistique exhaustive et complète. Existe-t'il un estimateur UVMB de θ^* .