IUP SID
Analyse
2008-2009

Examen du 17 Novembre 2009 de 7h45 à 9h45

Aide mémoire d'une page autorisé. Les calculatrices sont autorisées.

1 Intégration

1) Calculer
$$\int_0^1 \frac{x^2+2x+1}{x^2+17x+72}dx, \tag{1}$$
2) Calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 17\sin x + 72}. \tag{2}$$
Indication : on pourra effectuer le changement de variable $u = \sin x$.
3) Calculer
$$\int_0^{+\infty} x^k \exp\left(\frac{-x^3}{3}\right) dx \text{ pour } k = 2, 6, 10. \tag{3}$$
4) Calculer
$$\int_1^2 x^k \log(x) dx \text{ pour } k = 1, 2, 3. \tag{4}$$

2 Séries

1) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général $u_n = (1+n^8)^{-\frac{\alpha}{4}}$, $(n \in \mathbb{N})$ est-elle convergente ?
2) Soit ρ un réel donné. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et
$$v_{n+1} = \rho v_n,\ (n \in \mathbb{N}).$$
Pour quelles valeurs de ρ la série de terme général $(\frac{v_n}{n!})$ est-elle convergente. Déterminer la limite de cette série lorsque $\rho = 1$ et $\rho = -1$.
3) Montrer que les séries associées aux suites suivantes sont convergentes :

1. $u_n := \dfrac{\cos(n^2)}{n^2}$, $(n > 0)$,
2. $u_n := \dfrac{\cos(n^4)\sqrt{n}}{n!}$, $(n > 1)$,
3. $u_n := \dfrac{n^4\sqrt{n}}{2^n}$, $(n > 1)$.