Examen de septembre 2010

Durée 1h-Aucun document autorisé-Les calculatrices scientifiques ne sont pas autorisées

Modèle linéaire

On considère le modèle de régression

$$Y_j = a^* + b^* x_j + \varepsilon_j, \quad j = 1 \dots n \geq 2.$$

Les x_j sont pour $j = 1 \dots n$ donnés et prennent au moins deux valeurs distinctes. Les variables aléatoires ε_j $(j = 1 \dots n)$, sont i.i.d. de loi gaussienne centrée et de variance σ^{*2}. Les paramètres inconnus du modèle sont a^*, b^* et σ^{*2}.

a) Calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres a^*, b^* et σ^{*2}.

b) Construire un intervalle de confiance pour a^*.

c) Tester l'hypothèse $b^* = 0$.

d) Soit maintenant $X_1 \dots X_n$ un n-échantillon de loi uniforme sur $[0, 1]$. On considère maintenant le modèle

$$Y_j = \alpha^* + \beta^* X_j + \xi_j, \quad j = 1 \dots n \geq 2.$$

Ici les variables ξ_j $(j = 1 \dots n)$, sont i.i.d. centrées de variance σ_0^2 (mais ce ne sont pas nécessairement des gaussiennes). On suppose de plus que les suites (X_j) et (ξ_j) sont indépendantes. On reprend les estimateurs trouvés à la question a) où les x_j sont remplacés par les X_j. Appelons $\widehat{\alpha_n}$ et $\widehat{\beta_n}$ ces estimateurs. Montrer que $(\widehat{\alpha_n}, \widehat{\beta_n})$ converge presque sûrement vers (α^*, β^*).