UPS - Toulouse - Magistère d'économétrie et statistique
Partiel de Probabilités du 10 Février 2010

La durée de l'épreuve est 2h-Pas de document autorisé- Calculatrices UPS autorisées.

1 Question de cours : approximations de la loi binomiale

Soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \theta_n)$, $(n \in \mathbb{N}^*, 0 < \theta_n < 1)$.
1) On suppose que la suite θ_n est constante. Soit θ cette constante. Expliquer pourquoi, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n - n\theta}{\sqrt{n}} < t\right) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\theta(1-\theta)}\right)}{\sqrt{2\pi\theta(1-\theta)}} dx. \tag{1}$$

2) On ne suppose plus que la suite θ_n est constante. Mais on suppose que

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_n = \lambda > 0.$$

Expliquer pourquoi, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{2}$$

3) La mutation d'un certain gène a une probabilité p d'être présente chez un individu donné. On observe un échantillon de $n = 10000$ individus. En expliquant soigneusement la modélisation utilisée, donner une approximation numérique des probabilités suivantes :
a) $\mathbb{P}$(Observer au moins un mutant), si l'on suppose que la mutation du gène est très rare, $p = 10^{-4}$,
b) $\mathbb{P}$(Observer plus de 3021 mutants), si l'on suppose que la mutation du gène est fréquente, $p = 0.3$.

2 Lois Béta

On considère le domaine A du plan :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 \leq y \leq x, \; x \in [0,1] \right\}$$

1) Soit C l'aire de l'ensemble A. Calculer C.
2) On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité :

$$f(x,y) = \frac{\mathbb{1}_A(x,y)}{C}.$$

Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

3) On pose

$$\begin{cases} U = X \\ V = \dfrac{Y - X^2}{X(1-X)} \end{cases}$$

Quelle est la loi de (U, V) ? Montrer que les variables U et V sont indépendantes et donner leurs lois marginales.

3 Cauchy

Rappels et compléments admis

Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Rappelons que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est définie par l'intégrale :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \exp(i\omega x) f(x) dx, \ (\omega \in \mathbb{R}).$$

Par ailleurs, lorsque $\widehat{f}$ est intégrable on a la formule d'inversion :

$$\textit{pour tout } x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\omega x) \widehat{f}(\omega) d\omega.$$

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle double. C'est-à-dire que X a pour densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \exp -|x|, (x \in \mathbb{R}).$$

Soit Y une variable aléatoire de loi de Cauchy. Y a pour densité

$$f_Y(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, (x \in \mathbb{R}).$$

1) Calculer la fonction caractéristique de X. En utilisant la formule d'inversion précédente, déduire celle de Y.
2) Soit Y_1, Y_2 deux variables aléatoires indépendantes toutes deux de même loi que Y. Quelle est la loi de $\frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)$ (ne pas essayer d'utiliser la formule de convolution !!!) ?
3) Soit (Y_n) une suite i.i.d. de loi de Cauchy et soit $\overline{Y_n}$ la moyenne empirique construite à partir de $Y_1 \dots Y_n$:

$$\overline{Y_n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j.$$

Quelle est la loi de $\overline{Y_n}$? Ce résultat contredit-il la loi forte des grands nombres ?