

Examen du 14 Novembre 2008 de 7h45 à 9h45

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont autorisées.

1 Intégration

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^2 \frac{x^2 + 5}{x^2 + 5x + 4} dx, \quad (1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 5 \sin x + 4}, \quad (2)$$

$$\int_0^{+\infty} x^k \exp\left(\frac{-x^4}{4}\right) dx \text{ pour } k = 3, 7, 11. \quad (3)$$

2 Séries

- 1) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général $u_n = (1 + n^2)^{-\alpha}$, ($n \in \mathbb{N}$) est-elle convergente ?
- 2) Soit ρ un réel donné. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et

$$v_{n+1} = \rho v_n, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Pour quelles valeurs de ρ la série de terme général (v_n) est-elle convergente. Déterminer la limite de cette série lorsque $\rho = 1/3$.

3 Développements limités

- 1) Donner le développement limité de $f(x) = (1 - x)^{-1}$ à l'ordre 5 au point $1/3$. En déduire les valeurs des 5 premières dérivées de f en $1/3$.
- 2) En utilisant les développements limités calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2(1 + x) + \cos x + \sin x}{x^4}.$$