Examen du 8 janvier 2009

Durée 3h-Documents autorisés : cours manuscrits-Calculatrices autorisées.

1 Chaîne de Markov

Pour $0 \leq \theta \leq 1$, on considère la chaîne de Markov (X_n) à six états $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} \frac{2(1-\theta)}{3} & \frac{(1-\theta)}{6} & \frac{(1-\theta)}{6} & \theta & 0 & 0 \\ \frac{(1-\theta)}{2} & \frac{(1-\theta)}{2} & 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\theta)}{2} & \frac{(1-\theta)}{2} & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

et d'état initial $X_0 = 1$.

1) On suppose que $\theta = 0$.

a) Montrer que l'on ne visite jamais les états $\{4, 5, 6\}$ mais qu'avec la condition initiale choisie les états $\{1, 2, 3\}$ sont récurrents.

b) En déduire que l'on peut restreindre l'étude en ne considérrant qu'une chaîne à trois états que l'on précisera.

c) Ecrire la matrice de transition de cette nouvelle chaîne et calculer sa probabilité invariante. Quelle est la limite presque sûre de $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} X_j$?

2) On suppose maintenant que $\theta \neq 0$. Soit $A = \{1, 2, 3\}$, on pose

$$N_A := \inf\{n \in \mathbb{N}^* : \ X_n \notin A\}.$$

a) Montrer que la variable aléatoire N_A est presque sûrement finie. Déterminer sa loi.

b) Montrer que pour $n \geq N_A$ on a $X_n \notin A$. Combien de temps, en moyenne, passe t'on sur l'ensemble A avant de le quitter définitivement ?

c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_n := X_{n+N_A}$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov sur un espace d'états que l'on précisera. Déterminer son état initial et sa transition.

d) Montrer qu (Y_n) est récurrente et irréductible. Calculer sa probabilité invariante.

e) Quelle est la limite presque sûre de $\overline{Y_n} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j$? En déduire celle de $\overline{X_n}$.

2 Vecteur gaussien

On considère une matrice aléatoire $(X_{i,j})_{i=1,\ldots,N,j=1,\ldots,p}$ constituée de variables i.i.d. de loi normale standard. On pose

$$\begin{aligned} X_{i.} &:= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} X_{ij}, \ (i = 1 \ldots N), \\ S^2 &:= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{p}(X_{ij} - X_{i.})^2. \end{aligned}$$

1) Montrer que la variable S^2 est indépendante de $X_{i.}$ $(i = 1, \ldots, N)$.

2) Quelle est la loi de S^2 ?

Indication : pour $l = 1, \ldots, N$, considérer les sous espaces vectoriels

$$E_l := \left\{ (x_{ij})_{i=1,\ldots,N, j=1,\ldots,p} \in \mathbb{R}^{Np} : \ x_{lj} = x_{l.} \text{ pour } j = 1, \ldots, p \text{ et } x_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq l \text{ et } j = 1, \ldots, p \right\},$$

ainsi que le sous-espace vectoriel $E := E_1 + \cdots + E_N$. On montrera que les sous-espaces (E_i) sont deux à deux orthogonaux et l'on déterminera l'opérateur de projection orthogonale sur ces sous-espaces.

3 La ruine du joueur revisitée

Soit (ϵ_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. avec

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 0) = 2\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1) = 2\mathbb{P}(\epsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Soit α la solution positive de l'équation $\cosh x = 3$. On rappelle que la fonction $\cosh x$ vaut, pour $x \in \mathbb{R}$, $1/2(\exp(x) + \exp(-x))$. On pose, $S_0 = M_0 = 0,\ N_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j,\ M_n = S_n^2 - \frac{n}{2},\ N_n := \frac{1}{2^n} \exp(\alpha S_n).$$

Soit $a > 0$, on pose $T_a = \inf\{n \in \mathbb{N} : \ S_n \notin]-a, a[\}$. Le but du problème est d'étudier la loi de S_{T_a} et de calculer $\mathbb{E}(T_a)$ (on fera l'hypothèse que cette espérance est finie).

0) Calculer α.

1) Montrer que les trois suites (S_n), (M_n) et (N_n) sont des martingales.

2) Montrer que T_a est un temps d'arrêt pour les suites (S_n), (M_n) et (N_n).

3) Appliquer le théorème de Wald aux suites (S_n) et (M_n). En déduire la loi de S_{T_a} et la valeur de $\mathbb{E}(T_a)$.