Magistère d'économétrie et statistique
Probabilités 2008-2009

Examen du 3 décembre 2008 de 14h à 17h

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont autorisées.

1 Triangle

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f avec

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad .$$

1) Représenter graphiquement f.
2) Calculer l'espérance et la variance de X.
3) Déterminer la fonction de répartition de X.
4) Calculer les probabilités

$$P\left(X \leq -\frac{1}{2}\right), \quad P\left(X > \frac{1}{5}\right), \quad P\left(-\frac{3}{4} < X \leq \frac{2}{3}\right).$$

2 Power

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ dont la loi est définie par

$$P(X = k) = Ck, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

où C est une constante positive.
1) Calculer la constante C.
2) En utilisant les formules :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

calculer l'espérance et la variance de X.
3) On suppose $n = 3$, représenter graphiquement la fonction de répartition de X. La médiane de X est le plus petit réel μ tel que $P(X \leq \mu) \geq \frac{1}{2}$. Que vaut la médiane de X ?

3 Pareto

Soit α et β deux paramètres strictement positifs. Soit X la variable aléatoire de densité

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \text{ si } x > \beta \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

1) Pour tout réel t, calculer la probabilité de l'évènement $\{X > t\}$.
2) Soit $X_1 \dots X_n$ des variables aléatoires indépendantes de densité f. Soit

$$Y_n = \inf_{1 \leq j \leq n} X_j.$$

Pour tout réel t, calculer la probabilité de l'évènement $\{Y_n > t\}$. En déduire la densité de Y_n.
3) On suppose que $\alpha > 2$. Calculer l'espérance et la variance de X_1.

4 Simulation

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.
1) Soit $\lambda > 0$. On pose $X_1 = -\frac{1}{\lambda} \log U$. Calculer la fonction de répartition puis la densité de X_1. Reconnaître la loi de X_1.
2) Soit $X_2 = \tan(-\pi/2 + \pi U)$. Mêmes questions que a) pour X_2.
3) Soit X une variable aléatoire de densité $f > 0$ sur $\mathbb{R}$ et de fonction de répartition F.
   - Montrer que la fonction F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$
   - Quelle est la densité de $Y = F^{-1}(U)$?