UPS TOULOUSE III **2008-2009**
MAGISTERE 1

TD 4
PROBABILITES

Couple de Variables aléatoires. Fonction caractéristique

1 Couples de variables

a) Soit X et Y des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi du couple $(X/Y, Y)$ puis celle de Y. X/Y et Y sont-elles indépendantes ?

b) Soit Y_1 et Y_2 des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X_1 = \sqrt{-2\log Y_1}\cos 2\pi Y_2$ et $X_2 = \sqrt{-2\log Y_1}\sin 2\pi Y_2$. Montrer que X_1, X_2 sont i.i.d. et en déduire une méthode de simulation d'un couple de v.a. de loi normale indépendantes.

c) Soit Γ une matrice 2×2 symétrique définie positive, $\mu^T = (\mu_1, \mu_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et A une matrice 2×2 avec $\Gamma = AA^T$. Soit $Z = (X,Y)^T$ un couple i.i.d. de loi normale standard. Quelle est la densité du vecteur $Z_1 = AZ + \mu$? Réciproquement, soit $Z_1^T = (X_1, Y_1)$ un couple de densité :

$$f(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Gamma}}\exp\left(-\frac{(z_1-\mu)^T\Gamma^{-1}(z_1-\mu)}{2}\right).$$

et soit O une isométrie de $\mathbb{R}^2$ assimilée à sa matrice. Déterminer la loi du couple $Z_1' = O(Z_1 - \mu)$. A quelle conditions les composantes de Z_1' sont-elles indépendantes ? On suppose $\mu = 0$ et $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 1$, calculer $P(X_1 \geq 0, Y_1 \geq 0)$.

d) Soit X, Y, Z des variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $X' = \frac{X+Z}{\sqrt{2}}$ $Y' = \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$. En utilisant la question précédente montrer que $P(X' \geq 0, Y' \geq 0) = \frac{1}{3}$.

e) Montrer que

$$f(x) = \frac{1}{\pi \mathrm{ch} x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi de densité f. Calculer la densité de $X+Y$; pour cela il sera utile d'établir

$$\frac{1}{\mathrm{ch} y\,\mathrm{ch}(x-y)} = \frac{2e^{2y}}{\mathrm{sh} x}\left(\frac{1}{1+e^{2y}} - \frac{1}{e^{2y}+e^{2x}}\right) \qquad \text{pour } x \neq 0.$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh} x}dx$. Vérifier que $\displaystyle\frac{x}{\mathrm{sh} x} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} x\exp(-(2k+1)x)$ pour $x > 0$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

f) Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité de probabilité :

$$g(x,y) = \begin{cases} = \frac{1}{2}x\,y \text{ si } (x,y) \in D \\ \\ = 0 \text{ si } (x,y) \notin D \end{cases}$$

où D est le premier quart du disque centré en 0 de rayon 2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer la densité de probabilité de la variable $Z = X^2 + Y^2$, puis celle de $R = \sqrt{X^2+Y^2}$.

2 Fonction Caractéristique

1) Déterminer la fonction caractéristique de la loi de densité exponentielle double de densité $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$. En déduire la fonction caractéristique de la loi de Cauchy (de paramètre 1), puis la somme de n Cauchy indépendantes. Commentaires ?
2) Soit (X_n) des variables i.i.d. de loi de Bernoulli à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et de paramètre 1/2. Soit $Z_N = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} X_n$. Montrer que Z_N converge en loi, préciser la loi limite. En déduire $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
3) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n^j}{j!}$.
4) Soit (X_n) des v.a. i.i.d. exponentielle de paramètre 1. Rappeler la loi de $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Quelle est la fonction caractéristique de la loi de S_n. A l'aide de la convergence de $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ retrouver la formule de Stirling.
5) Soit (X_n) des v.a. i.i.d. centrées de variance 1. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\dfrac{S_1 + \cdots + S_n}{\sqrt{n^3}}$ converge en loi vers une limite que l'on précisera.
6) Dans un programme de calcul, l'opérateur décide d'utiliser J chiffres significatifs après la virgule et d'arrondir tous les résultats d'opérations à cette configuration (donc à $1/2 \;\; 10^{-J}$ près). On suppose qu'il effectue 10^6 opérations élémentaires successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur $[-1/2 \;\; 10^{-J}, 1/2 \;\; 10^{-J}]$ et que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération. Calculer la probabilité pour que l'erreur finale soit inférieure ou égale (en valeur absolue) à $1/2 \;\; 10^{-J+3}$.

– Soient X une variable aléatoire de densité

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}\, \mathbf{1}_{[|x|\geq 1]}$$

et φ sa fonction caractéristique.

  – Vérifier que φ est une fonction paire et montrer que

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{1-\varphi(t)}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}\cdot$$

  – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi que X et soit, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Exprimer en fonction de φ les fonctions caractéristiques φ_n des variables aléatoires S_n/n. En déduire que la suite (S_n/n) converge en loi et préciser la loi limite.
  Expliquer pourquoi la loi faible des grands nombres ne s'applique pas.