UPS TOULOUSE III **Le 7 mai 2008**
MAGISTERE 1-2008

EXAMEN
STATISTIQUE

Durée 3 heures-Notes de cours et calculatrices autorisées

1 Les méfaits du tabac

On a demandé à des experts de donner leur jugement sur l'arôme d'échantillons de tabac avant et après longue conservation. Les résultats sont les suivants :

	Avant	Après
Pas d'altération	72	119
Altération	178	31

La longue conservation altère t-elle l'arôme ?

2 L'âge du capitaine

Quelle est l'effectif nécessaire n, pour qu'avec une erreur de première espèce de 5%, on détecte un différence de moyenne égale à 0.6 fois l'écart type, avec une erreur de deuxième espèce infèrieur à 1%. ?

3 Exponential

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon d'une loi de fonction de répartition F. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de répartition $F_\theta,\ \theta > 0$ où $F_\theta(x) = (1 - \exp(-x/\theta))\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $\theta_o > 0$. On suppose que $F = F_\theta$.

a) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance T de θ.

b) Prouver ou admettre que $\frac{2nT}{\theta}$ suit la loi $\chi^2(2n)$. En déduire un intervalle de confiance bilatère pour θ de risque α.

c) Bâtir un test de "$\theta = \theta_o$" contre "$\theta \neq \theta_o$".

4 Régression

Soit p un entier naturel strictement positif, on considère le modèle linéaire

$$Y_{ij} = a_i x_{ij} + b_i + \varepsilon_{ij},\quad i = 1, 2,\quad j = 1 \ldots 2p,$$

où

- $\varepsilon_{ij},\quad i = 1, 2,\quad j = 1 \ldots 2p$, sont des variables i.i.d., gaussienes de variance σ^2.
- $x_{ij} = (-1)^{i+j}$, $i = 1, 2,\quad j = 1 \ldots 2p$.
- Les paramètres a_i, b_i $i = 1, 2$ et σ^2 sont inconnus.

a) Calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres.

b) Déterminer une région de confiance pour le couple de coefficients directeurs (a_1, a_2).
Pour $p = 50$, on suppose que l'on a obervé ${S^2}^{\text{obs}} = 0.9$ (S^2 est l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2), et $(\sum_{j=1}^{2p} x_{1j} Y_{1j})^{obs} = 2.5 \quad (\sum_{j=1}^{2p} x_{2j} Y_{2j})^{obs} = 1.4$.
Tracer, pour ces observations, la région de confiance obtenue dans le plan (a_1, a_2).

c) Tester l'égalité des coefficients directeurs $a_1 = a_2$.
Application numérique : reprendre les valeurs numériques données à la question précédente.

d) Tester l'égalité des ordonnées à l'origine $b_1 = b_2$.
Application numérique : on reprend les valeurs de p et de S^2 de la question b) et l'on suppose que $Y_{1.}^{\text{obs}} = (1/(2p) \sum_{j=1}^{2p} Y_{1j})^{\text{obs}} = 5.3 \quad Y_{2.}^{\text{obs}} = (1/(2p) \sum_{j=1}^{2p} Y_{2j})^{\text{obs}} = 4.95$.