Examen du 31 janvier 2008

Durée 3h-Document autorisés : cours manuscrits-Calculatrices autorisées.

1 Chaîne de Markov

Pour $0 \leq \theta \leq 1$, on considère la chaîne de Markov (X_n) à trois états $\{1, 2, 3\}$ de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\theta}{3} & \frac{2(1-\theta)}{3} \\ \theta & (1-\theta)^2 & \theta(1-\theta) \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

a) Pour quelles valeurs de θ la chaîne est-elle irréductible ?
b) Discuter suivant les valeurs de θ de la nature des états.
c) On suppose que θ est tel que la chaîne est récurrente. Déterminer la probabilité invariante. En déduire la limite presque sûre de

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log X_j.$$

e) On suppose que $\theta = 0.5$ et l'on considère l'espace à 9 états :

$$E := \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

On pose pour $n \geq 1$, $Y_n = (X_n, X_{n-1})$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov à espace d'états dans E. Déterminer sa matrice de transition.

2 Intégration

Montrer que pour $t < 1$

$$\log(1-t) \leq t.$$

Pour $n \geq 1$, on pose

$$I_n := \int_0^n (1 - x/n)^n dx.$$

Montrer que I_n converge vers une limite à déterminer.

3 Branchement

Soit (X_{ij}) un tableau infini de variables aléatoires entières positives i.i.d de carré intégrable et d'espérance $\lambda > 0$. On pose $N_0 = 1$ et pour $n \geq 0$

$$N_{n+1} := \sum_{j=1}^{N_n} X_{n+1,j}.$$

Montrer que la suite (N_n/λ^n) est une martingale. Que vaut son espérance ?