1^{ere} Année Magistère 07-08

Statistique-TD 1

1 Contrôle de qualité

Une entreprise fabrique une pièce de moteurs industriels. Parfois ces pièces se révèlent immédiatement défaillantes après la vente. Le taux de défaillance doit être limité à 4%. Sur 500 pièces contrôlées, 28 sont défaillantes.

a) Donner une fourchette de confiance pour le taux en question (risque 5%).

b) Est-ce-que la norme de qualité de production est respectée ?

2 La pêche miraculeuse

Dans un étang, il y a deux sortes de poissons, des gardons et des carpes. On appelle p la proportion de gardons dans l'étang. On suppose que $p = 0,3$.

a) Un pêcheur attrape 8 poissons. On note X le nombre de gardons et Y le nombre de carpes obtenus sur les 8 poissons pêchés. Quelles sont les lois des variables aléatoires X et Y ? Quelle est la probabilité que sur les 8 poissons pêchés, il y ait :
  - Au moins 5 gardons.
  - plus 4 carpes.

b) On pêche 100 poissons. Quelle est la probabilité que le nombre de gardons pêchés soit plus grand que 47 ?

c) Sur 100 poissons pêchés on a effectivement observé 47 gardons, que peut-on en conclure quant à la vraie valeur de p ?

3 Elections

On se propose de déterminer la taille de l'échantillon à prélever pour que, dans un sondage d'opinion concernant une élection à deux candidats A et B, le candidat gagnant sur l'échantillon soit le candidat gagnant au niveau de la population. (On rappelle que, d'après la théorie de l'échantillonnage, ceci ne peut être obtenu qu'avec une "forte probabilité"). Si p_A désigne la proportion exacte d'électeurs ayant l'intention de voter A et p_{0A} la proportion observée correspondante, il s'agit donc de prélever un échantillon d'effectif n tel que $p_{0A} > 0,5$ si $p_A > 0,5$ (et $p_{0A} < 0,5$ si $p_A < 0,5$) avec "forte probabilité".

a) D'une façon générale (c'est-à-dire sans préciser la valeur de n, ni celle de p_A) :
  - Quelle es la distribution d'échantillonage de p_{0A} (moyenne, écart-type, forme) ?
  - Quelle est la probabilité pour que p_{0A} soit inférieure à 0,5 ?

b) On donnera pour chacune des cases du tableau suivant la probabilité pour que p_{0A} soit inférieure à 0,5.

0,4	0,45	0,475
100		
400		
1000		

c) Les résultats obtenus ci-dessus confirment qu'on peut ne pas être certain que $p_{0A} < 0,5$, si $p_A < 0,5$. On se propose donc de vouloir limiter à 5% le risque que $p_{0A} > 0,5$, quand $p_A = 0,48$. Combien faut-il interroger d'électeurs ?

4 Une souris verte..

On inocule une maladie toujours mortelle sans traitement à des souris afin de savoir si un certain produit peut enrayer cette maladie.
On observe un échantillon de 100 souris et on compte le nombre le nombre de souris guéries. Sur cette échantillon, on dénombre 64 guérisons.

a) Donner un intervalle de confiance pour p proportion de guérison.

b) Quelle aurait dû être la taille minimum n de l'échantillon pour déterminer cette proportion à 2% près, avec le coefficient de confiance 99% ?

5 Grippe

On effectue une enquête, durant une épidémie de grippe, dans le but de connaître la proportion p de personnes présentant ensuite des complications graves. On observe un échantillon représentatif de 400 personnes et pour un tel échantillon 40 personnes ont présenté des complications.

a) Donner un intervalle de confiance pour p au risque 5%.

b On désire que la valeur estimée p_0 diffère de la proportion inconnue exacte p de moins de $0,005$ avec une probabilité égale à 95%. Quel sera l'effectif d'un tel échantillon ?

c) Quel devrait être le risque pour obtenir le même intervalle qu'en b) en conservant l'effectif $n = 400$. Quelle conclusions peut-on en tirer ?

d) Si on dispose de 40 échantillons, combien en moyenne d'intervalles de confiance (au risque 5%) comprendront la valeur exacte inconnue p ?

6 Inflation

Le gouvernement d'un pays a décidé de fixer, à l'échelon national, le prix d'un produit. Il tolère une distribution des prix suivant une loi normale de moyenne 100 francs et d'écart type 10 francs. Ne pouvant vérifier les nombreux points de vente, il considère un échantillon de 36 points de vente où la moyenne de prix du produit vaut 105 francs. Doit-il considérer que ces pris sont en dehors de la norme imposée ?

7 Instrument

L'erreur faite quand on utilise un certain instrument de mesure de longueur est une loi normale centrée d'écart-type 1mm.

a) Calculer la probabilité que l'erreur faite quand on utilise une fois l'instrument soit inférieure a 0.5 mm.

b) On suppose que l'instrument est utilisé de façon indépendante 9 fois pour mesurer une longueur donnée. Calculer la probabilité que la moyenne de ces 9 mesures soit au plus distante de 0.5 mm de la vraie longueur.

c) Un autre instrument a été utilisé 10 fois de façon indépendante pour mesurer une longueur donnée. Les erreurs observées sont (en mm) :$-0.2, 0.1, -0.3, 0.1, 0.2, -0.3, -0.1, 0.1, 0.2, 0.3$. En supposant que ces erreurs sont normalement distribuées, calculer un intervalle de confiance au niveau 95%, pour l'erreur moyenne.

8 contrôle de qualité

l'écart type de la teneur d'un composant dans un médicament est de 8 milligrammes. Un nouveau procédé de fabrication vise à diminuer cet écart type. Pour 10 mesures de teneur sur des unités fabriquées par le nouveau procédé, on obtient en mg :
725 722 727 718 723 731 719 724 726 726
. On suppose que les mesures sont des v.a gaussiennes et indépendantes. Faire un test permettant de voir si le but recherché est atteint.

9 Des confitures

Les poids en grammes de 1000 pots de confiture sortis successivement d'une machine à conditionner ont été les suivants (les résultats sont donnés par classes de longueur 2, l'origine de la première étant 2000 et l'extrémité de la dernière 2024 :

classe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
nombre de pots	9	21	58	131	204	213	185	110	50	16	3	0

a) En admettant que le poids des pots suit une loi gaussienne, estimer sa moyenne et son écart type (dans chaque classe, on prendra comme valeur le milieu de la classe).

b) En admettant que l'écart type de la machine est invariable dans le temps (égal à celui estimé en a)) et que le règlage n'a d'influence que sur la moyenne, quelle valeur doit-on choisir si l'on veut que la probabilité pour qu'un pot pèse moins de 2000 g (infraction à la législation du service des fraudes) soit inférieure à 10^{-4} ?

c) La machine ayant été ainsi réglée on pèse, en cours de fabrication, simultanément 8 pots pour contrôler le réglage de la machine ; dans quels cas décidera-t-on de modifier le règlage ?

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$: $\phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$. Pour $x < 0$, utiliser $\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.