

## Examen de septembre 2007

*La dure de l'épreuve est 2 heures. Aucun document n'est autorisé. les calculatrices électroniques sont autorisées*

### 1 Rêve récurrent

L'irradiation par les rayons  $X$  de vers soie induit certaines anomalies. La probabilité d'une anomalie particulière est  $p = 1/5$ .

- a) Quelle est la probabilité de trouver au moins un embryon présentant cette anomalie, sur dix disséqués ?
- b) Combien faut-il en disséquer pour trouver au moins une anomalie avec une probabilité supérieure à 50%? à 95%?

### 2 Cauchemar récurrent

Soit  $a > 0$ , et  $X$  la variable aléatoire continue de densité de probabilité  $f$  avec

$$f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Déterminer la constante  $a$ .
- 2) Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

### 3 Réseau influent

On considère 2 lignes  $A$  et  $B$  d'un réseau numérique se rejoignant pour former la ligne  $C$ . On suppose que :

- Le nombre  $X_A$  de messages passant sur  $A$ , durant une minute donnée, suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .
- Le nombre  $X_B$  de messages passant sur  $B$ , durant la même minute suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda' > 0$ .
- Les variables  $X_A$  et  $X_B$  sont indépendantes.

Quelle est la loi du nombre  $X_C$  de messages passant, durant cette même minute, sur  $C$ ?

## 4 Des dés

On considère un dé équilibré à 10 faces. Soit  $X$  le score observé après un lancer.

- a) Quelle est la loi de  $X$ . Calculer son espérance et sa variance.
- b) Soit  $X_1, \dots, X_{100}$  les scores de 100 lancers de dé indépendants. On pose

$$\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i.$$

En utilisant le théorème de la limite centrale, évaluer  $P(\bar{X} \leq 5)$ .

## 5 Comme des dés

On considère la variable aléatoire  $X$  de densité:

$$\begin{aligned} f(x) &= C(1 - \sin 2\pi x) && \text{si } x \in [0, 1] \\ &= 0 && \text{si } x \notin [0, 1]. \end{aligned}$$

- a) Que vaut la constante  $C$ ?
- b) Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition de  $X$ .
- c) Que vaut l'espérance de  $X$ ? Calculer la variance de  $X$ .
- d) Soit  $X_1, \dots, X_{30}$  des variables i.i.d. de même loi que  $X$ . Evaluer  $P(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 15, 5)$ .

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  :  $\phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ . Pour  $x < 0$ , utiliser  $\phi(x) = 1 - \phi(-x)$ .