IUP SID
2006–2007
Probabilités

Examen du 19 décembre 2006

La durée de l'épreuve est 2 heure. Aucun document n'est autorisé. les calculatrices électroniques sont autorisées

1 Rêve récurrent

L'irradiation par les rayons X de vers à soie induit certaines anomalies. La probabilité d'une anomalie particulière est $p = 1/10$.

a) Quelle est la probabilité de trouver au moins un embryon présentant cette anomalie, sur dix disséqués ?

b) Combien faut-il en disséquer pour trouver au moins une anomalie avec une probabilité supérieure à 50%? à 95%?

2 Cauchemar récurrent

Soit $a > 0$, et X la variable aléatoire continue de densité de probabilité f avec

$$f(x) = \begin{cases} ax(4-x) & \text{si } \ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que a=3/32.

2) Calculer l'espérance et la variance de X.

3 Réseau influent

On considère 2 lignes A et B d'un réseau numérique se rejoignant pour former la ligne C. On suppose que :

- Le nombre X_A de messages passant sur A, durant une minute donnée, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- Le nombre X_B de messages passant sur B, durant la même minute suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda' > 0$.
- Les variables X_A et X_B sont indépendantes.

1) Quelle est la loi du nombre X_C de messages passant, durant cette même minute, sur C?

2) On a observé $\{X_C = n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Montrer que, la loi de X_A conditionnelle à cet événement est :

$$P(X_A = k | X_C = n) = C_n^k \frac{\lambda^k \lambda'^{n-k}}{(\lambda + \lambda')^n}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

En utilisant la fonction génératrice, calculer l'espérance et la variance de cette loi conditionnelle.

4 Des dés

On considère un dé équilibré à l faces. Soit X le score observé après un lancer.

a) Quelle est la loi de X. Calculer son espérance et sa variance. Indications :

$$\sum_{i=1}^{l} i = \frac{l(l+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{l} i^2 = \frac{l(l+1)(2l+1)}{6}.$$

b) On suppose $l = 10$. Soit $X_1, \dots X_{100}$ les scores de 100 lancers de dé indépendants. On pose

$$\overline{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i.$$

En utilisant le théorème de la limite centrale, évaluer $P(\overline{X} \leq 5)$.

5 Comme des dés

On considère la variable aléatoire X de densité:

$$\begin{aligned} f(x) &= C(1 - \cos 2\pi x) \qquad \text{si } x \in [0,1] \\ &= 0 \qquad \text{si } x \notin [0,1]. \end{aligned}$$

a) Que vaut la constante C?

b) Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

c) Que vaut l'espérance de X? Calculer la variance de X.

d) Soit $X_1, \dots X_{30}$ des variables i.i.d. de même loi que X. Evaluer $P(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 15,5)$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$: $\phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$. Pour $x < 0$, utiliser $\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.