Feuille d'exercice 5

Variables aléatoires continues, suite et fin

1 Changements de variable

1) Des résistances sont fabriquées en série. La résistance d'un élément choisi au hasard dans la fabrication est une variable aléatoire R de distribution uniforme entre 9 et 11 ohms. Déterminer la densité de probabilité de la conductance $C = 1/R$.
2) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quelle est la loi de $\tan X$?
3) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \pi]$. Quelle est la loi de $\cos X$?

2 Alzheimer

La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ est la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

i) Calculer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
ii) X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, déterminer les fonctions de répartition et les densités des v.a. X^2, $\exp(X)$, $\exp(-X)$ et $1/X$.
iii) Soit T une variable aléatoire positive telle que $P[T > t] > 0$ pour tout $t \geq 0$ et

$$P[T > s + t \mid T > t] = P[T > s] \quad \text{pour tous } s, t \geq 0.$$

Interpréter cette propriété et montrer que T suit une loi exponentielle.

3 La méthode IFR

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F_X est continue et strictement croissante de $]a, b[\subset] - \infty, +\infty[$ dans $]0, 1[$.

1) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = F_X(X)$. Calculer l'espérance et la variance de Y.
2) Déduire de 1. une méthode pour générer une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X donnée (continue et strictement croissante).
3) Appliquer cela dans les cas suivants en identifiant la loi concernée
   i) $F_X(x) = 1 - e^{\lambda x}$
   ii) $F_X(x) = \dfrac{x - a}{b - a}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
   iii) $F_X(x) = \dfrac{1}{\pi}(\arctan x + \dfrac{\pi}{2})$

4 Un poisson normal

Un poste de péage comprend deux guichets : un guichet pour les véhicules partant vers la Lomagne et un autre pour les véhicules en direction de Toulouse. Le nombre X de véhicules se dirigeant vers la Lomagne et passant le péage en un laps de temps de cinq minutes suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 15$ et le nombre de véhicules Y passant durant cinq minutes en direction de Toulouse suit une loi de Poisson de paramètre $\mu = 20$. On suppose X et Y indépendantes.

1) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Z égale au nombre total de véhicules passant dans un intervalle de cinq minutes au péage ?
2) En approchant convenablement la loi de Z, calculer la probabilité que ce nombre soit supérieur à 40.
3) Quelle est la probabilité que 35 véhicules passent au péage (dans un sens ou dans l'autre) dans un laps de temps de cinq minutes ?

5 Manque de clarté ?

On suppose que la durée de vie d'une ampoule électrique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2 \times 10^{-3} h^{-1}$. Si l'on remplace une ampoule par une ampoule semblable dès qu'elle "grille", quelle est la probabilité qu'au bout de 50000 heures l'ampoule en fonctionnement soit au moins la dixième ?

6 C'est les vacances

Une compagnie aérienne gère un vol de 200 passagers avec les données techniques et le modèle probabiliste suivants :

- La charge maximale autorisée (passagers + bagages) est de 18 tonnes.
- Le poids d'un passager est une variable aléatoire d'espérance 65 kg et d'écart-type 15 kg
- Si le poids maximal autorisé des bagages (par passager) est P kg, ce poids est une variable d'espérance $0,7P$ kg et d'écart-type $0,2P$ kg.
- Toutes les variables aléatoires (poids des passagers et poids des bagages) sont indépendantes

À quelle valeur la compagnie doit-elle fixer P (pour un vol plein) si elle veut avoir 95 chances sur 100 qu'il n'y ait pas de dépassement de la charge maximale autorisée ?