

Feuille d'exercice 2

Variables aléatoires discrètes

1 Dés

On jette 2 dés non pipés. Soit X la variable aléatoire représentant la somme des chiffres obtenus.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer son espérance et sa variance.
- 3) Déterminer le mode et la fonction de répartition de X .
- 4) Calculer la probabilité des évènements

$$(X \geq 6), (X < 4) \text{ et } (2 \leq X < 8).$$

2 Bridge

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire associant à la carte tirée sa valeur suivant la règle du jeu de bridge : 4 pour un as, 3 pour un roi, 2 pour une dame, 1 pour un valet et 0 pour toute autre carte.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer son espérance et sa variance.
- 3) Trouver le mode et la fonction de répartition de X .
- 4) Calculer la probabilité de l'évènement $(X \leq 2)$.

3 Dauphins

Une famille de dauphins est composée de 6 femelles et 4 mâles. On choisit au hasard, dans cette famille, un groupe de 4 dauphins. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de femelles que l'on peut observer dans ce groupe. Déterminer sa loi de probabilité, son mode, son espérance et sa variance.

4 Restaurant

Un restaurant possède 50 places. La probabilité pour qu'une personne, ayant réservé, ne vienne pas, est de 20%. Un jour, le patron a pris 52 réservations. Quelle est la probabilité pour qu'il se trouve dans une situation embarrassante ?

5 Garçons

Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de garçons que l'on peut observer dans une famille de 6 enfants. Déterminer sa loi de probabilité, son espérance et sa variance.

6 Loi Uniforme

Soit $a \in \mathbf{N}$ avec $a > 0$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \dots, 10a\}$ telle que, pour tout entier k dans cet ensemble,

$$P(X = k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{10}.$$

- 1) Trouver a afin que X suive bien une loi de probabilité.
- 2) Calculer l'espérance et la variance de X .

7 Loi de Poisson

On considère une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, définie, pour tout $k \in \mathbf{N}$, par

$$P(X = k) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

- 1) Calculer l'espérance et la variance de X .
- 2) Pour $\lambda = 10$, calculer la probabilité de l'évènement $(8 \leq X \leq 10)$.

8 Fish

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{N} telle que, pour tout entier $k \geq 0$,

$$P(X = k - 1) = \frac{1}{4}kP(X = k).$$

Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance et sa variance.

9 Loi Géométrique

On considère une variable aléatoire X de loi Géométrique de paramètre $0 < p < 1$, définie, pour tout $k \in \mathbf{N}$, par

$$P(X = k) = (1 - p)p^k.$$

- 1) Calculer l'espérance et la variance de X .
- 2) Pour $p = \frac{1}{4}$, calculer la probabilité de l'évènement $(X \leq 6)$.

10 Tortues

Le nombre X d'oeufs pondus par une tortue au cours d'une ponte suit une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$. Un oeuf a la probabilité p d'arriver à éclosion. Quelle est la loi du nombre Y de bébés tortues à chaque ponte ?

11 Loïs de Poisson

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$ et $\mathcal{P}(\beta)$, où α et β sont deux réels > 0 , et soit $Z = X + Y$. Pour tout entier $n \geq 0$, déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X sachant que $Z = n$ (c'est-à-dire les probabilités conditionnelles $P(X = k | Z = n)$ pour $k \geq 0$).

12 Bernoulli

Soient q et r deux réels strictement compris entre 0 et 1, et soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli. On suppose que pour tout $n \geq 1$

$$P[X_{n+1} = 1 | X_n = 0] = q, \quad P[X_{n+1} = 0 | X_n = 1] = r.$$

On note $p_n = P[X_n = 1]$ ($n \geq 1$).

- 1) Écrire une équation de récurrence qui exprime p_{n+1} en fonction de p_n .
- 2) Montrer qu'il existe un $p \in [0, 1]$ tel que cette équation de récurrence admette la solution constante $p_n = p$ pour tout n , et montrer que dans le cas général p_n tend vers p lorsque n tend vers l'infini.

13 Loi multinomiale

- a) Soit X une v.a. de loi concentrée sur $\{1, \dots, k\}$;

$$P(X = j) = p_j, 1 \leq j \leq k.$$

Soit $Z^j = \mathbf{1}_{(X=j)}$ et $s = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^k$. Calculer :

$$E \left[s_1^{Z^1} s_2^{Z^2} \cdots s_k^{Z^k} \right].$$

- b) Soit X_1, \dots, X_n un n -échantillon de la loi précédente (n variables indépendantes de même loi), et

$$N^j = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(X_i=j)}.$$

Calculer :

$$E \left[s_1^{N^1} s_2^{N^2} \cdots s_k^{N^k} \right].$$

En déduire, pour a_1, \dots, a_k entiers de somme n :

$$P(N^1 = a_1, \dots, N^k = a_k) = \frac{n!}{a_1! \cdots a_k!} p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}.$$

C'est la loi multinomiale de paramètre (p_1, \dots, p_k) et d'ordre n .