Examen du 25 janvier 2007

Durée 3h-Document autorisés :cours manuscrits-Calculatrices autorisées.

1 Chaîne de Markov

Soient $x_0, \dots, x_{k-1}$ les racines k-ème de l'unité ($x_j = \exp \frac{2ij\pi}{k}$, $j = 0 \dots k-1$) et $0 < p < 1$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires dont la loi est définie par :

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ P(X_{n+1} = x_{j+1}|X_n = x_j) &= 1 - P(X_{n+1} = x_{j-1}|X_n = x_j) = p, \ (n > 0 \text{ et } 0 < j < k-1) \\ P(X_{n+1} = x_0|X_n = x_{k-1}) &= 1 - P(X_{n+1} = x_{k-2}|X_n = x_{k-1}) = p, \ (n > 0) \\ P(X_{n+1} = x_1|X_n = x_0) &= 1 - P(X_{n+1} = x_{k-1}|X_n = x_0) = p, \ (n > 0). \end{aligned}$$

1) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov irréductible.
2) Etudier la périodicité de la chaîne en fonction de la parité de k.
3) Ecrire la matrice de transition P de la chaîne.
4) Quels sont les vecteurs v de $\mathbb{R}^k$ satisfaisant $v^T P = v^T$?
5) A partir de maintenant on se place dans le cas où la chaîne est apériodique. Que vaut $\lim_{n\to\infty} P^n$?
6) Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i = x_j\}}$, $j = 0 \dots k-1$ converge en probabilité quand n tend vers l'infini vers une limite indépendante de j.

2 Exponentielle double

Soit Z une variable aléatoire de densité $h(z) = \frac{1}{2}\exp(-|z|)$, $(z \in \mathbb{R})$. On appelle φ la fonction caractéristique de Z.

a) Calculer la fonction φ.
b) Soit l une fonction mesurable paire sur $\mathbb{R}$ on suppose que l est bornée, et qu'elle est nulle à l'extérieur de $[-1, 1]$. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{l(x)}{1+x^2} = \frac{1}{4}\int\int_{\mathbb{R}^2} \cos(tx) l(x) \exp(-|t|) dx dt \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

c) Déduire de (1) la valeur de l'intégrale

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \exp(-|t|) dt$$

3 La ruine du joueur.

Les fluctuations d'un jeu peuvent être modélisées par une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes prenant la valeur $+1$ pour un succès et -1 pour un échec. On suppose que, pour un réel $0 < p < 1$, $P(X_n = +1) = p$ et $P(X_n = -1) = q$ avec $q = 1 - p$. Le nombre de points gagnés après n jeux est donc

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

1) Montrer que $(S_n - n(2p-1))$ est une martingale.
2) Montrer que $(q/p)^{S_n}$ est une martingale.

4 Poisson

Soit (N_t) un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$.

1) Montrer que $\frac{N_t}{\lambda t}$ converge en probabilité vers 1 quand t tend vers l'infini.

2) Calculer la fonction caractéristique de N_t $(t > 0)$. Quelle est la loi asymptotique de $\sqrt{t}(\frac{N_t}{\lambda t} - 1)$?