Feuille d'exercice 5

Mouvement brownien et Processus de Poisson

1 Mouvement brownien

1.1 Bridge

Soit $(B_t; t \geq 0)$ un processus gaussien centré de covariance $\Gamma(s,t) = s \wedge t; s,t \in [0,+\infty[$.
Montrer que $X_t = B_t - tB_1; t \in [0,1]$, est un processus gaussien centré. Calculer sa covariance. Monter de plus que $(X_t; 0 \leq t \leq 1)$ est indépendant de B_1.

1.2 Différentielle

Soit I un espace topologique, Γ une fonction de covariance définie sur I, et $(X_t; t \in I)$ un processus du second ordre de covariance Γ.

1) Montrer que si l'application $I \to L^2(\Omega)$, qui à $t \in I$ associe X_t est continue, alors Γ est une fonction continue. Montrer que la réciproque est vraie si on suppose de plus que le processus est centré.
2) Désormais $I = [0,+\infty[$, $(X_t; t \in I)$ désigne un processus centré du second ordre, de covariance Γ et Γ est une fonction continue. On suppose que $(X_t; t \in I)$ est "différentiable" : il existe un processus du second ordre $(X'_t; t \in I)$ tel que $\dfrac{X(t+h) - X(t)}{h}$ converge vers $X'(t)$, dans $L^2(\Omega)$, lorsque $h \to 0$, pour tout réel positif t.
   a) Montrer que Γ est dérivable et $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t) = E[X_s X'_t]; s,t \geq 0$.
   b) En déduire : $\dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial s}(s,t) = E[X'_s X'_t]; s,t \geq 0$.
   c) On suppose que $(X_t; t \in I)$ est un processus gaussien et est continu, en déduire que $(X'_t; t \in I)$ est également un processus gaussien.

1.3 Brownian is strong

Montrer que le mouvement brownien $(B_t; t \geq 0)$ vérifie la loi forte des grands nombres : $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{B_t}{t} = 0$

1.4 Prix littéraires

Soit $(B_t; t \geq 0)$ un mouvement brownien issu de 0 et $\lambda > 0$. On pose :

$$X_t = e^{-\lambda t} \; B(e^{2\lambda t}); \; t \geq 0.$$

1) Montrer que $(X_t; t \geq 0)$ est un processus gaussien centré et continu. Calculer sa covariance.
$(X_t; t \geq 0)$ est appelé le processus d'Ornstein Ulhenbeck de paramètre λ.
2) a) Vérifier que pour tous $t > 0, h > 0$, les deux v.a. (X_0, X_t) et (X_h, X_{t+h}) ont même loi.
b) Montrer plus généralement que $(X_t; t \geq 0)$ est un processus stationnaire : pour tous $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n, h > 0$ le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ a même distribution que $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h})$.
3) Soit $\lambda > 0$ un paramètre réel fixé. On admet l'existence d'un processus gaussien $(Y_t)_{t \geq 0}$ solution de l'équation différentielle :

$$Y_t = Y_0 + B_t - \lambda \int_0^t Y_s ds; \; \forall t \geq 0,$$

où Y_0 est une v.a.r. gaussienne de loi réduite et centrée et indépendante du mouvement brownien directeur $(B_t)_{t \geq 0}$
a) Montrer que $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus continu, est-il dérivable ?
b) Calculer $E[Y_t]$.
c) Soient $s \geq 0$ et φ la fonction définie sur $[0,s]$ par la formule $\varphi(t) = E[Y_t B_s]$. Montrer que φ vérifie une équation différentielle linéaire, calculer $\varphi(t), 0 \leq t \leq s$.
D'une manière analogue évaluer $E[Y_t B_s]$ pour tous $s,t \geq 0$.
d) On suppose $\lambda = 1/2$. Montrer que $(Y_t)_{t \geq 0}$ a même loi qu'un processus d'Ornstein Ulhenbeck de paramètre 1/2.

2 Processus de Poisson

1) Soit (N_t) un processus ponctuel de Poisson d'intensité θ ($\theta > 0$). Quelle est la loi conditionnelle de N_s sachant N_t ($0 < s < t$), puis plus généralement de $N_{s_1}, N_{s_2} - N_{s_1}, \ldots, N_{s_n} - N_{s_{n-1}}$ sachant N_t ($0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < t$).

2) Paradoxe de l'autobus
Soit un processus de Poisson (N_t) de paramètre $\lambda > 0$. On appelle S_n ($n > 1$) l'instant du n-ième saut du processus et on pose $S_0 = 0$. On pose ensuite :

$$Z_t = t - S_{N_t} \quad \text{et} \quad W_t = S_{N_t+1} - t.$$

a) Calculer la loi du couple (Z_t, W_t). Montrer que Z_t et W_t sont indépendantes, et que W_t suit une loi exponentielle de paramètre λ.

b) Donner la loi de Z_t, et vérifier que Z_t a la même loi que $\min(S_1, t)$. Montrer que la fonction de répartition de Z_t tend vers la fonction de répartition de S_1 quand $t \to \infty$.

c) Calculer $E(Z_t + W_t)$. Trouver sa limite quand t tend vers $+\infty$. Que pensez-vous de ce résultat ?

d) On considère les arrivées successives d'un autobus à un arrêt donné comme définissant un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Un passager potentiel arrive à l'arrêt à l'instant t. Quelle est l'espérance A de son temps d'attente ?

3) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi μ. Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de la suite (X_n). Pour un borélien de $\mathbb{R}$, B, tel que $0 < \mu(B) < 1$ on définit la variable aléatoire
$N(B) = \sum_{i=1}^{\tau} \mathbf{1}_B(X_i)$ si $\tau \geq 1$ et $N(B) = 0$ sinon.

a) Calculer la loi de probabilité de $N(B)$ et la loi du couple $(N(B), N(B^c))$.

b) Montrer que τ suit une loi de Poisson si, et seulement si, pour tout borelien B, $N(B)$ et $N(B^c)$ sont indépendantes. Déterminer la loi de $N(B)$ dans ce cas.