Feuille d'exercice 4

Chaîne de Markov sur un espace d'états au plus dénombrable

1 Exercices élémentaires

1.1 Marche aléatoire

On considère une marche aléatoire simple. Étudier la récurrence de la chaîne.

1.2 Transience

Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible et transiente. Montrer que, quelque soit la loi initial et l'état x, l'espérance du nombre de passage en x est presque sûrement fini.

1.3 Urnes

On répartit $2r$ boules dont r blanches et r noires dans deux urnes ; chaque urne contient toujours r boules. *L'état du système* à l'instant n est le nombre X_n de boules blanches dans la première urne. A chaque étape, une boule est choisie au hasard dans chacune des urnes et ces deux boules sont échangées. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov et expliciter sa matrice de transition.

1.4 Etude d'une chaîne a 9 états

On considère une matrice de transition (9×9) de la forme suivante (les x représentent des coefficients > 0).

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & x & 0 & x & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Décrire les états transients, absorbants, récurrents, et les classes de points communiquants.

2 Chaîne sur un espace fini

2.1 Transmission d'un message

Un message codé de façon binaire est transmis à travers un réseau. Chaque bit est transmis avec une probabilité d'erreur :

- égale à p pour un passage de 0 à 1 ($p \neq 0$ et 1),
- égale à q pour un passage de 1 à 0 ($q \neq 0$ et 1).

Le résultat de la transmission au n-ème relais est noté X_n. On suppose que les relais se comportent indépendamment les uns des autres.

1) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov, donner sa matrice de transition Π.
2) La chaine est-elle irréductible ? récurrente ? Déterminer Π^n et les mesures invariantes éventuelles.
3) Soit, pour $x, y \in \{0,1\}$, $N_n(x,y) = E_x\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}\right]$. Calculer $N_n(x,y)$ puis $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x,y)}{n}$. Ce résultat était-il prévisible ?

2.2 Chaîne de Markov à k états

Soit (X_n) une chaîne de Markov d'ensemble d'états E fini stationnaire de transition P. On pose :

$$Q = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P^j$$

1) On suppose qu'il existe $\omega \geq 1$ tel que $P^{n+\omega} = P^n$ pour $n \geq 1$; montrer que

$$Q = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{\omega} P^j.$$

2) On suppose P primitive, c'est-à-dire qu'il existe $r \geq 1$ tel que $p_{ij}^{(r)} > 0,\ \forall i, j$. Montrer alors les propriétés suivantes (faire d'abord $r = 1$) :
   a) Si $Px = x,\ x \in \mathbb{R}^k,\ x \neq 0$ alors il existe x_1 tel que $x = x_1 e$ avec $e = (1, \ldots, 1)^T$.
   b) Si $(P - I)^2 x = 0$ alors $(P - I)x = 0$ (on écrira $P = I + R$ et $P^n x = x + nRx$). En déduire que l'espace caractéristique associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par e.
   c) si λ est une valeur propre de P telle que $\lambda \neq 1$, alors $|\lambda| < 1$.
   d) En déduire que P^n converge, à vitesse exponentielle vers Q, et que Q a toutes ses lignes égales, à coefficients strictement positifs.
   e) Vérifier toutes ces propriétés dans le cadre de l'exercice 2.1.

3 Chaîne sur un espace dénombrable

3.1 Renouvellement

Une machine se met en route à l'instant 0 et possède une durée de vie aléatoire X, v.a. entière de loi $(p(x))_{x \geq 1}$ $(p(x) > 0,\ \forall x)$. A l'instant où elle tombe en panne, elle est remplacée par une machine identique, de durée de vie donc de même loi mais indépendante de la première et ainsi de suite. On note $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ les durées de vie successives des machines et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. A_t désigne l'age de la machine en fonctionnement à l'instant t (entier ≥ 0). Par convention si une machine tombe en panne à l'instant t, A_t est l'age de sa remplaçante soit 0.

1) Si $\nu_t \geq 1$, $(t \in \mathbb{N})$ désigne le numéro (aléatoire) de la machine en marche au temps t, exprimer $\{\nu_t = n\}$ à l'aide des S_n et en déduire l'expression de A_t en fonction des variables S_n.
2) Montrer que A_t est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition Q.
3) Établir que l'état 0 est récurrent et que la chaîne est irréductible. Calculer les proportions de temps asymptotiques que la chaîne (A_t) passe dans ses différents états.

3.2 File d'attente $G/G/1$

Des clients arrivent à une caisse de magasin. L'intervalle de temps entre l'arrivée du n-ème client et du $(n+1)$-ème client est une v.a. A_n. Le temps de service du n-ème client est une v.a. B_n. Les v.a. (A_n) (resp. (B_n)) sont supposées de même loi, et toutes ces v.a. sont supposées indépendantes entre elles. Soit W_n le temps d'attente du n-ème client.

1) Trouver une relation entre W_{n+1}, W_n, A_n et B_n. Montrer que (W_n) est une chaîne de Markov. Donner la transition de la chaîne.
2) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} (B_k - A_k)$ et $I = \inf S_n$. Montrer que $P(I = -\infty)$ vaut 0 ou 1 suivant que 0 est récurrent ou transitoire pour la chaîne (W_n), (Etablir en premier lieu que $W_{n+1} = S_n - \inf_{0 \leq p \leq n} S_p$ $S_0 = 0$).

3.3 Chaîne sur $\mathbb{N}$

Soit (X_n) une chaîne de Markov d'ensemble d'états $\mathbb{N}$, et $P(n, n+1) = \theta_n = 1 - P(n, 0)$, où $0 < \theta_n < 1$ $(n \geq 0)$.

1) Etudier la nature de l'état 0, puis des autres états.
2) Existe-t-il une mesure invariante ?

3.4 Chaîne de vie ou de mort

On considère la chaîne de Markov (X_t) à valeurs dans $\mathbb{N}$ de transition Q

$$Q(x, x-1) = q_x \quad Q(x, x+1) = p_x \quad Q(x, x) = r_x \quad p_x + q_x + r_x = 1.$$

On suppose que $p_x > 0\ \forall x \geq 0$, $q_x > 0\ \forall x \geq 1$, $q_0 = 0$ et on pose $\gamma_x = \frac{q_1 \cdots q_x}{p_1 \cdots p_x}$, $\forall x \geq 1$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on note T_a le temps d'atteinte de a.

1) Soit $a < b$ des entiers naturels. On pose $T = \min(T_a, T_b)$ et l'on construit la chaîne de Markov tuée $(\tilde{X}_t)$ à valeurs dans $[a, b]$:
   - $X_0 \in [a, b]$.
   - $\tilde{X}_t = X_t$ pour $t < T$.
   - $\tilde{X}_t = X_T$ pour $t \geq T$.

   On appelle $\tilde{Q}$ la transition de la chaîne $(\tilde{X}_t)$. Déterminer une *fonction* non triviale telle que $\tilde{Q}u = u$.

2) En déduire que $E_x[u(\tilde{X}_t)|\tilde{X}_{t-1} = k] = u(k)$ pour tout x avec $a < x < b$.
3) En déduire que $E_x(u(X_T)) = E_x(u(X_0))$.
4) Calculer $P_x(T = T_a)$ et $P_x(T = T_b)$ puis $P_1(T_0 < +\infty)$. Déduire de ce qui précède que la chaîne est récurrente si, et seulement si, $\sum_{x \geq 1} \gamma_x = +\infty$.

4 Un autre modèle de file d'attente

Des clients se présentent à un guichet pour se faire servir et prennent leur place dans une file d'attente. Un seul guichetier assure le service de la façon suivante : il ouvre le guichet au début d'une heure ; si aucun client n'attend, il referme le guichet et revient au début de l'heure suivante ; si en début d'heure, des clients attendent, il sert le premier de la file, le service durant exactement une heure. Le nombre de clients qui se présentent pendant la n-ème heure est une v.a. A_n. On suppose que (A_n) est une suite i.i.d. de loi $p = (p_k)_{k \geq 0}$ concentrée sur $\mathbb{N}$.
Soit X_0 le nombre de clients en attente à l'instant 0 (1ère ouverture du guichet),..., X_n le nombre de clients en attente à l'instant n (fin de la n-ème heure, début de la $n+1$-ème).
Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov et calculer sa probabilité de transition π. Montrer qu'elle es irréductible si $p_0 > 0$ et $p_0 + p_1 < 1$. Etudier les autres cas.
Pour $p_0 > 0$ et $p_0 + p_1 < 1$, on propose pour étudier la chaîne les étapes suivantes :
1) Chercher s'il existe une fonction invariante par π de la forme $i \to x^i$ avec $0 < x < 1$.
2) Calculer pour $\lambda > 0$ et $i \in \mathbb{N}$, $E_i[\exp(-\lambda T_0)]$, $P_i(T_0 < \infty)$, $E_i(T_0)$ où $T_0 = \inf\{n : \ n > 0, \ X_n = 0\}$. Interpréter.

5 Exercices supplémentaires

5.1 Bistoc

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une chaîne de Markov comportant $n+1$ états numérotés de 0 à n. Sa matrice de transition P est dite bistochastique si $\forall j \in \{0, \ldots, n\}$, $\sum_{i=0}^{n} P_{ij} = 1$. On suppose que P admet une mesure stationnaire. Déterminer cette mesure.

5.2 Nom à particule

$n+1$ points numérotés de 0 à n sont disposés sur un cercle (les points 0 et n sont situés côte à côte). Une particule saute d'un point à un autre de la façon suivante. A chaque étape (chaque saut) et quel que soit le point où se trouve la particule, elle a une probabilité $1/2$ de se déplacer vers chacun des deux points adjacents.
1) Soit X_k la position (numéro du point occupé) de la particule après le k^{ieme} saut. Montrer que $(X_k)_k$ est une chaîne de Markov. Quelle est sa matrice de transition P ? Cette matrice est-elle récurrente, périodique ? Lorsque la chaîne est apériodique, quelle est la limite de $P(X_k = j)$ quand k tend vers l'infini ?
2) Pour tout k différent de 0 ou n, on note A_{kn} la probabilité pour que partant du point k, le point n soit atteint avant le point 0. On définit ensuite
   - $A = (A_{kn})_{k \in \{1, \ldots, n-1\}}$.
   - $Q = (P_{ij})_{i,j \in \{1, \ldots, n-1\}}$.
   - $R = (P_{kn})_{k \in \{1, \ldots, n-1\}}$.

   Montrer que l'on a la relation $(I - Q)A = R$. En déduire pour tout $k \in \{1, n-1\}$, la valeur de A_{kn}.
   Remarque : On pourra vérifier que l'inverse de la matrice $(I - Q)$ est la matrice M donnée par $\forall i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $M_{ij} = \frac{2}{n}\text{Min}(i,j)(n - \text{Max}(i,j))$.
3) La particule part du point 0 ($X(0) = 0$). Quelle est la probabilité pour qu'à son premier retour en 0, elle ait fait un tour complet du cercle ? (c'est-à-dire qu'elle revienne par le point n si elle est partie par le point 1, ou vice versa).
   Indication : On pourra considérer un état fictif, et se ramener à la question 2) pour une chaîne à $n+2$ états.