Feuille d'exercice 1

Intégration une question d'actualité ! !

1 Faisons des probabilités

1.1 Evénements variables aléatoires

1.1.1 Evénements

Soient A, B, C trois événements. Exprimer à l'aide des opérations sur les événements, les événements suivants et calculer leurs indicatrices en fonction de celles de A, B, C :
- "A est réalisé seul."
- "A et B sont réalisés mais pas C."
- "Un des trois événements est réalisé."
- "Deux événements au plus sont réalisés."
- "aucun événement n'est réalisé."

1.1.2 C'est limite

Soit (A_n) une suite d'événements, écrire à l'aide des opérations $\cup$ et $\cap$ l'événement suivant

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \text{"tous les } A_n\text{"`à partir d'un certain rang se produisent."}$$

Calculer l'indicatrice de $\liminf_{n\to\infty} A_n$ en fonction de celles des A_n.

1.1.3 (Re)Garder sa mesurabilité

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Prouver que $\sup_{n\in N} X_n$, $\inf_{n\in N} X_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n$ sont des variables aléatoires.

1.2 Variables à densité

1.2.1 Loi normale

Soit X une variable de loi normale centrée réduite, c'est-à-dire que la densité de la loi de X est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-x^2}{2}, \quad x \in R.$$

a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
b) Calculer la densité de $Y = aX + b$.
c) Calculer la densité de $Y = exp(x)$.

1.2.2 Chico

Soit θ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Déterminer fonction de répartition de la variable tg θ.

1.2.3 Loi béta

Soient $a > 0,\ b > 0$, on appelle loi béta $\beta(a, b)$ la loi concentrée sur $[0, 1]$ de densité :

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} 1_{\{x\in[0,1]\}}$$

avec pour $\alpha > 0$:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Vérifier que f est bien la densité d'une loi. Soit X de loi $\beta(a, b)$ montrer que :

$$E(X) = \frac{a}{a+b}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

1.2.4 Loi de Pareto

a) Pour $r > 0$, $\alpha > 0$, on considère la loi de Pareto unilatérale de densité :

$$f_{r,\alpha}(x) = \frac{\alpha r^\alpha}{x^{\alpha+1}} 1_{\{x>r\}}.$$

Calculer sa moyenne et sa variance si elles existent.

b) Pour $r < s$, $\alpha > 0$, on considère la loi de Pareto bilatérale de densité :

$$f_{r,s,\alpha}(x,y) = \frac{\alpha(\alpha+1)(s-r)^\alpha}{(y-x)^{\alpha+2}} 1_{\{x<r<s<y\}}.$$

Soit (X,Y) un couple de variables ayant cette loi. Montrer que $s-X$ et $Y-r$ ont la même loi que l'on déterminera. Calculer pour $\alpha > 2$, $E(Y-X)^2$.

1.2.5 Vecteur aléatoire

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de loi $F_{X,Y}$. Trouver dans les cas suivants les lois marginales, les fonctions de répartition de (X,Y), X, Y, $X+Y$. Si P et Q sont des points de $\mathbb{R}^2$, $\lambda_{P,Q}$ est la mesure de Lebesgue sur le segment (P,Q).

a) $A=(0,1)$ $B=(1,0)$ $C=(0,-1)$

$$F_{X,Y} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}(\lambda_{A,B} + \lambda_{B,C}).$$

b) $D=(1,1)$ $E=(-1,1)$ $F=(-1,-1)$ $G=(1,-1)$

$$F_{X,Y} = \frac{1}{8}(\lambda_{D,E} + \lambda_{E,F}\lambda_{F,G} + \lambda_{G,D}).$$

c) $F_{X,Y}$ est la loi uniforme sur le triangle ABC.

d) $F_{X,Y}$ est la loi uniforme sur le carré $DEFG$.

e) $F_{X,Y} = \frac{1}{3}\sum_{m,n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n 3^m}$

f) $F_{X,Y}$ est la loi uniforme sur la circonférence de centre O de rayon 1 :

$$f_{X,Y}(\Gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_\Gamma(\cos\theta, \sin\theta)d\theta.$$

2 Problème de couple

Soient X et Y 2 variables indépendantes de même loi μ. On définit

$$Q = Q(\mu) = E\{\exp -|X-Y|\}.$$

a) Montrer que $Q(\mu) \leq 1$ et $Q(\mu) = 1$ si, et seulement si, X et Y sont constantes.

b) Calculer Q lorsque X et Y suivent des lois de Bernoulli ; puis lorsque μ est la loi uniforme sur $[-1,1]$; enfin lorsque X et Y suivent des lois normales centrées réduites.

2.1 Réduisons les inégalités

2.1.1 Inégalité exponentielle

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables indépendantes et de même loi définie par :

$$P(X_j = 1) = P(X_j = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

a) Montrer que

$$P(S_n \geq a) \leq \exp -axE(\exp xS_n), \quad \forall a, x \geq 0.$$

b) démontrer l'inégalité $\text{ch}x \leq \exp\frac{x^2}{2}$ et déduire de a) que

$$P(S_n \geq a) \leq \exp\frac{-a^2}{2n}.$$

c) En déduire que presque sûrement $\underline{\lim}_{n\to\infty}(2n\log n)^{-\frac{1}{2}} S_n \leq 1$.

2.1.2 Inégalité de type Tchebyschev

Soient X une variable aléatoire réelle quelconque définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et g une fonction réelle positive croissante définie sur R^+. Montrer que :

$$P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{E(g(|X|))}{g(\epsilon)}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

En déduire l'inégalité de Tchebyschev.

2.1.3 Inégalité de Hölder

Soient U et V des variables aléatoires telles que les variables $e^U, \; e^V$ possèdent une espérance. Soit $t \in [0,1]$, montrer l'inégalité :

$$\frac{e^{tU}}{(E\,e^U)^t}\frac{e^{(1-t)V}}{(E\,e^V)^{1-t}} \leq t\frac{e^U}{E\,e^U} + (1-t)\frac{e^V}{E\,e^V}.$$

En déduire :

$$E\{e^{tU}e^{(1-t)V}\} \leq (E\,e^U)^t(E\,e^V)^{1-t}.$$

Soient p et q des réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient X et Y des variables aléatoires telles que les variables $|X|^p, \; |Y|^q$ possèdent une espérance. Déduire de ce qui précède l'inégalité de Hölder :

$$E|XY| \leq (E|X^p|)^{\frac{1}{p}}(E|Y^q|)^{\frac{1}{q}}.$$

2.1.4 Inégalité de Jensen

Soient ψ une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire intégrable telle que la variable $\psi(X)$ soit aussi intégrable. Montrer que :

$$\psi(E(X)) \leq E\psi(X).$$

3 Théorèmes de convergence

3.1 Faire de Laplace

Montrer que la suite des intégrales

$$\sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

est convergente et trouver sa limite (on fera le changement de variable $x = t/\sqrt{n}$).

3.2 Sale Gauss

Soit, pour $n \geq 0$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos nx\,dx$.

a) Montrer que $\sqrt{n}\,I_n$ tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$. (Faire le changement de variable $x = t/\sqrt{n}$, puis montrer qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée ; il faudra pour cela trouver une majoration convenable de $\log(\cos x)$ pour $0 \leq x < \pi/2$).

b) (Re)trouver la relation de récurrence liant I_n et I_{n+2} ; en déduire la valeur de $I_{2p}I_{2p+1}$ pour $p \geq 0$, puis celle de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$.

3.3 Sale Gauss (Bis)

a) Calculer, pour $n \geq 0$ et $x > 0$, $I_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt^2}\,dt$. (On trouvera une formule de récurrence soit en dérivant sous le signe somme, soit en faisant une intégration par parties).

b) Soit, pour tout z complexe,

$$G(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}e^{-zt}\,dt.$$

Montrer que, pour tout z, on peut intégrer terme à terme la série obtenue en remplaçant e^{-zt} par sa série entière et en déduire que $G(z)$ est somme d'une série entière dont on calculera les coefficients (ne pas chercher à reconnaître la série).

c) Même exercice, en intégrant sur $]-\infty, +\infty[$ au lieu de $[0, +\infty[$; montrer que on obtient une fonction usuelle.

3.4 Récréation

Soit α un réel > 0. On pose, pour $t \geq 0$,

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{x+t} dx.$$

a) Montrer que f est finie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.
b) Soit $f_n(x) = x^\alpha(1 - x + x^2 - \cdots + x^{2n} - x^{2n+1})$. Montrer que, sur $[0,1]$, la suite des fonctions (f_n) est croissante. En déduire

$$F(1) = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} + \cdots - \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \cdots.$$

3.5 Faire Laplace

Soit

$$F(x) = \int_0^1 e^{-x/t}\, dt \qquad \text{pour } x \geq 0.$$

a) Vérifier brièvement qu'on définit bien ainsi une fonction F continue sur $[0,+\infty[$.
b) Montrer qu'on peut dériver l'expression de F sous le signe somme en tout point $x > 0$.
c) Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0 (on pourra montrer que $F'(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0_+).

3.6 Faire du Laplace (Bis repetita)

Soit, pour t réel > 0,

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x}\, e^{-tx}\, dx.$$

Montrer que $F(t)$ est fini pour tout $t > 0$, que F est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $F(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Calculer explicitement $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$.

3.7 Continuity

Soit, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$ et que $F(x) \to 0$ si $x \to +\infty$; calculer $F(0)$.

Montrer aussi que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et trouver une équation différentielle satisfaite par F sur cet intervalle. Intégrer cette équation en posant d'abord $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$, puis retrouver la valeur de I en utilisant les valeurs connues de $F(x)$.

4 Fût Béni

4.1 Intégrabilité

- Montrer que la fonction $\frac{1}{x+y}$ est intégrable sur $[-1,1]^2$.
- Montrer que la fonction $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ est intégrable sur $[-1,1]^3$.

4.2 Produit

Soit X et Y 2 variables aléatoires indépendantes de densités f et g par rapport à la mesure de Lebesgue. Prouver que $Z = XY$ a la densité :

$$\int_{\mathbb{R}} f(\frac{z}{y}) g(y) \frac{1}{|y|} dy.$$

4.3 Quotient

Soit X et Y 2 variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Montrer que $\frac{X}{Y}$ a une loi de Cauchy. Montrer que c'est aussi le cas pour la loi de densité $\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{1+x^4}$.

5 Espace produit

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a positive sur cette espace. Montrer que les ensembles

$$G = \{(\omega, X(\omega)),\ \omega \in \Omega\} \text{ et } H = \{(\omega, x),\ \omega \in \Omega\ 0 \leq x \leq X(\omega)\}$$

sont dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(R)$. Montrer, en notant λ la mesure de Lebesgue

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X \geq x)dx = (P \otimes \lambda)(H).$$

6 Espacio producto

Sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux v.a X et Y de lois F et G.
a) Prouver que si X est intégrable, on a :

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(y))dy - \int_{-\infty}^0 F(y)dy.$$

b) Prouver, pour X et Y de carré intégrable :

$$\Gamma(X, Y) = \int\int \Gamma(\mathbf{1}_{(X>s)}\Gamma(\mathbf{1}_{(Y>t)}dsdt.$$

7 Loi gaussienne bivariée

Soit $U_1,\ U_2,\ U_{12}$ trois v.a indépendantes gaussiennes centrées et de variances non nulles $v_1,\ v_2,\ v_{12}$. Soit $X_1 = U_1 + U_{12},\ X_2 = U_2 + U_{12}$. Quelles sont les lois de X_1 et de X_2, leurs moyennes, leurs variances σ_1^2 et σ_2^2 ? Quelle est le coefficient de corrélation ρ de (X_1, X_2) ? Montrer que (X_1, X_2) a la densité

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

ù Même questions pour $X_2 = U_2 - U_{12}$. Pour $\sigma_1 = \sigma_2$, prouver :

$$P(X_1 \geq 0, X_2 \geq 0) = P(X_1 \leq 0, X_2 \leq 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\ \text{Arcsin}\rho.$$