UPS TOULOUSE III **Le 19/04/2007**
MIM 2007

EXAMEN
PROBABILITÉS & APPLICATIONS

Durée 3 heures

1 Around the geometric distribution

a) Soit $\theta \in]0,1[$, montrer que pour $|z| < \frac{1}{\theta}$, $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k z^k = \frac{1}{1-\theta z}$.

b) Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X=k) = Ck\theta^k$. ($C \in \mathbb{R}_+^*,\ k \in \mathbb{N}^*$). En calculant de deux façons différentes la dérivée de la fonction f, déterminer la fonction génératrice de X. En déduire la valeur de la constante C.

c) Calculer l'espérance et la variance de X.

d) On considère une partie de pile ou face de durée indéterminée. On suppose que sur un lancer pile a la probabilité θ. Soit Y le nombre de lancers (y compris le dernier), avant d'observer une première fois face. Quelle est la loi de Y ? Calculer la fonction génératrice de Y. Ecrire un programme `MATLAB` pour simuler une réalisation de la variable Y.

e) Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer λ tel que la partie entière de $Z+1$ soit, en loi, égale à Y. En déduire un second programme `MATLAB` pour simuler une réalisation de la variable Y.

f) Soit Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que Y. Montrer que $Y_1 + Y_2 - 1$ a la même loi que X. Ecrire un programme `MATLAB` pour simuler une réalisation de la variable X.

2 Circle

Soit X une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0,1]$.

a) Soit A l'aire du disque de rayon X centré en 0. Déterminer la fonction de répartition de A. Calculer sa densité. Donner un programme `MATLAB` pour simuler une réalisation de la variable A.

b) Calculer l'espérance et la variance de A.

c) Soit $A_1, \ldots A_{100}$ des variables i.i.d. de même loi que A. On pose $\overline{A} = \frac{1}{100}\sum_{j=1}^{100} A_j$. Expliquer comment on peut, en utilisant le théorème de la limite centrale, approximer

$$P\left(\overline{A} \leq \frac{\pi}{3} + 1,64\frac{\pi\sqrt{5}}{75}\right). \tag{1}$$

d) Ecrire un programme `MATLAB` qui utilise la méthode de Monte Carlo pour estimer la probabilité (1).

3 Chaîne de Markov

Soient $x_0 := 0, x_1 := 1, x_2 := 2$ et $0 < p < 1$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires dont la loi est définie par :

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ P(X_{n+1} = x_2 | X_n = x_1) &= 1 - P(X_{n+1} = x_0 | X_n = x_1) = p, (n \geq 0) \\ P(X_{n+1} = x_0 | X_n = x_2) &= 1 - P(X_{n+1} = x_1 | X_n = x_2) = p, \ (n \geq 0) \\ P(X_{n+1} = x_1 | X_n = x_0) &= 1 - P(X_{n+1} = x_2 | X_n = x_0) = p, \ (n \geq 0). \end{aligned}$$

1) Expliquer pourquoi (X_n) est une chaîne de Markov irréductible.
2) Ecrire la matrice de transition P de la chaîne. Ecrire une fonction `MATLAB` qui simule une itération de la chaîne.
3) Quels sont les vecteurs v de $\mathbb{R}^k$ satisfaisant $v^T P = v^T$?
4) Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i = x_j\}}, \ j = 0 \ldots 2$ converge en probabilité quand n tend vers l'infini vers une limite indépendante de j.
5) Ecrire un programme `MATLAB` qui met en evidence le résultat de convergence montré en 4).