Processus de Poisson

1 Introduction au processus de Poisson.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $N_0 = 0$ et pour tout $t > 0$

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(S_n \leq t)},$$

(N_t) est un processus de Poisson d'intensité λ.

Exercice 1. Montrer que, pour tout $t > 0$, N_t suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$. En déduire un code Matlab permettant de générer un vecteur aléatoire Y contenant N réalisations i.i.d. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ où les valeurs $N \geq 1$ et $\lambda > 0$ sont affectées par l'utilisateur. Pour N assez grand, vérifier la loi des grands nombres sur les moyennes empiriques successives de Y.

Exercice 2. Soit (N_t) un processus ponctuel de Poisson d'intensité λ avec $\lambda > 0$. Quelle est la loi conditionnelle de N_s sachant N_t avec $0 < s < t$, puis plus généralement de $N_{s_1}, N_{s_2} - N_{s_1}, \ldots, N_{s_n} - N_{s_{n-1}}$ sachant N_t avec $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < t$.

2 Paradoxe de l'autobus.

Soit (N_t) un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. On appelle S_n l'instant du n^e saut du processus et on pose $S_0 = 0$. On pose ensuite

$$Z_t = t - S_{N_t} \qquad \text{et} \qquad W_t = S_{N_t+1} - t.$$

Exercice 3. Calculer la loi du couple (Z_t, W_t). Montrer que Z_t et W_t sont indépendantes et que W_t suit une loi exponentielle de paramètre λ. Donner la loi de Z_t et vérifier que Z_t a la même loi que $\min(S_1, t)$. Montrer que la fonction de répartition de Z_t tend vers la fonction de répartition de S_1 quand t tend vers $+\infty$. Calculer $\mathbb{E}[Z_t + W_t]$. Trouver sa limite quand t tend vers $+\infty$. Que pensez-vous de ce résultat? Finalement, on considère les arrivées successives d'un autobus à un arrêt donné comme définissant un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Un passager potentiel arrive à l'arrêt à l'instant t. Quelle est l'espérance de son temps d'attente?

3 Mesure de comptage.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi μ. Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite (X_n). Pour un borélien B de $\mathbb{R}$ tel que $0 < \mu(B) < 1$, on définit la variable aléatoire $N(B) = \sum_{n=1}^{\tau} \mathbb{1}_B(X_n)$ si $\tau \geq 1$ et $N(B) = 0$ sinon.

Exercice 4. Calculer la loi de probabilité de $N(B)$ et la loi du couple $(N(B), N(B^c))$. Montrer que τ suit une loi de Poisson si, et seulement si, pour tout borelien B, $N(B)$ et $N(B^c)$ sont indépendantes. Déterminer la loi de $N(B)$ dans ce cas.