Marches aléatoires simples

1 La ruine du joueur.

Les fluctuations d'un jeu peuvent être modélisées par une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes prenant la valeur $+1$ pour un succès et -1 pour un échec. On suppose que, pour un réel $0 < p < 1$, $\mathbb{P}(X_n = +1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = q$ avec $q = 1 - p$. Le nombre de points gagnés après n jeux est donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Exercice 1. Montrer que S_n/n converge presque sûrement vers $2p - 1$. Calculer, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[S_n]$ et

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\right].$$

Soit A un événement qui ne dépend que de $S_1, S_2 \ldots, S_k$ avec $1 \leq k < n$. Montrer que l'on a alors $\mathbb{E}[(S_n - n(2p-1))\mathbb{I}_A] = \mathbb{E}[(S_k - k(2p-1))\mathbb{I}_A]$ et

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\mathbb{I}_A\right] = E\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_k}\mathbb{I}_A\right].$$

Soit T une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour $n \geq 1$, l'événement $\{T = n\}$ ne dépend que de $S_1, \ldots, S_n$. Une telle variable aléatoire s'appelle un temps d'arrêt. On suppose de plus qu'il existe un entier M strictement positif tel que $\mathbb{P}(T \leq M) = 1$. Montrer que $\mathbb{E}[S_T] = (2p-1)\mathbb{E}[T]$ et

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_T}\right] = 1.$$

On considère, pour $a, b \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire $T_{a,b} = \inf\{n : \ S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}$. On pose ensuite, pour $M \geq 1$, $T_{a,b}^M = \min(M, T_{a,b})$. Vérifier que $T_{a,b}^M$ est un temps d'arrêt et en déduire les résultats ci-dessus pour $T_{a,b}$. Supposons que le joueur possède une fortune initiale égale à a. Calculer la probabilité pour que le joueur s'arrête ruiné, $\mathbb{P}(S_{T_{a,b}} = -a)$ et, pour $p \neq 1/2$, la valeur moyenne de la durée du jeu $\mathbb{E}[T_{a,b}]$. On suppose $p = 1/2$. Montrer que $\mathbb{E}[S^2_{T_{a,b}}] = \mathbb{E}[T_{a,b}]\mathbb{E}[X_1^2]$ et en déduire $\mathbb{E}[T_{a,b}]$. On se place dans le cas où $p \neq 1/2$. Créer un code Matlab permettant de simuler un grand nombre de trajectoires de la marche aléatoire. Utiliser ces trajectoires pour estimer par Monte Carlo $\mathbb{P}(S_{T_{a,b}} = -a)$ et $\mathbb{E}[T_{a,b}]$. Comparer vos résultats numériques aux formules théoriques obtenues précédement. Répondre aux mêmes questions dans le cas $p = 1/2$.

2 Marches aléatoires dans $\mathbb{Z}^d$.

Exercice 2. On définit la marche aléatoire (X_n) dans $\mathbb{Z}$ par $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $X_n = X_{n-1} + 1$ avec une probabilité p et $X_n = X_{n-1} - 1$ avec une probabilité $1 - p$. Que peut-on dire sur $\mathbb{E}[X_n]$ et $Var(X_n)$ si $p = 1/2$ et si $p > 1/2$? Simuler plusieurs trajectoires de longueur n dans le cas $p = 1/2$. Etudier

$$m_n = \min_{1 \leq k \leq n} X_k \qquad \text{et} \qquad M_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

Pour différentes valeurs de a, estimer le premier temps de passage de la chaîne en a lorsqu'elle part de 0.

Exercice 3. On définit la marche aléatoire (X_n) dans $\mathbb{Z}^2$ par $X_0 = (0,0)$ et, pour tout $n \geq 1$, on définit les transitions de la première composante a_n de X_n par le tableau suivant

	$a_{n-1} = 0$	$a_{n-1} > 0$	$a_{n-1} < 0$
$\mathbb{P}(a_n = a_{n-1} - 1)$	$1/3$	p	q
$\mathbb{P}(a_n = a_{n-1} + 1)$	$1/3$	q	p
$\mathbb{P}(a_n = a_{n-1})$	$1/3$	$1-p-q$	$1-p-q$

et idem pour la seconde composante b_n de X_n. Simuler et représenter graphiquement différentes trajectoires de (X_n) obtenues avec différentes valeurs de p et q. Représenter sous forme d'un histogramme les distributions empiriques de a_n et b_n et commenter.