Processus de Galton-Watson

On se propose d'étudier le processus de branchement encore appelé processus de Galton-Watson, donné par

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Y_{n,k}$$

avec $X_0 = 1$. La variable aléatoire X_n représente le nombre d'individus à la n^e génération et pour chaque $1 \leq k \leq X_n$, $Y_{n,k}$ correspond au nombre de descendants du k^e individu de la n^e génération. On suppose que $(Y_{n,k})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$, appelée loi de fécondité, de moyenne m et de variance σ^2. On note q la probabilité d'extinction de la population. Suivant la valeur de m, trois comportements asymptotiques distincts vont se présenter.

a) Si $m < 1$, on est dans le **cas sous-critique**, $q = 1$ donc la population va s'éteindre presque sûrement. De plus, la loi conditionnelle de X_n sachant que $X_n > 0$ admet une loi limite.

b) Si $m = 1$, on est dans le **cas critique**, $q = 1$ donc la population va également s'éteindre presque sûrement. On a aussi $n\mathbb{P}(X_n > 0) \to 2/\sigma^2$ et

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[X_n | X_n > 0] \to \frac{\sigma^2}{2}.$$

c) Si $m > 1$, on est dans le **cas sur-critique**, q est l'unique point fixe de la fonction génératrice associée à la loi de $(Y_{n,k})$ et (X_n/m^n) converge p.s. et en moyenne quadratique vers une variable aléatoire finie L avec $\mathbb{E}[L] = 1$, $\text{Var}(L) = \sigma^2/(m^2 - m)$ et $\mathbb{P}(L = 0) = q$. On a aussi

$$\frac{X_n - m^n L}{\sqrt{X_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{\sigma^2}{m^2 - m}\Big).$$

Exercice 1. Simuler un processus de Galton-Watson pour lequel chaque individu admet de 0 2 descendants avec le choix de p_0 et p_1. Calculer l'espérance m et la probabilité d'extinction q.

Exercice 2. Dans le cas où $m < 1$, représenter une évolution assez longue de la population. Pour 100 trajectoires, calculer la moyenne empirique de X_n pour chaque n et vérifier que cette moyenne divisée par m^n est proche de 1.

Exercice 3. Dans le cas où $m = 1$, représenter une évolution de la population. Pour 100 trajectoires pour lesquelles $X_n > 0$, calculer la moyenne empirique de X_n sachant $X_n > 0$ avec $n = 10, 20, 50$. Vérifier que cette moyenne est proche de $n\sigma^2/2$.

Exercice 4. Dans le cas où $m > 1$, représenter une évolution de la population puis représenter plusieurs trajectoires de X_n/m^n.