UPS TOULOUSE III **PROBABILITÉS & STATISTIQUES**
MIM, TP4 **2007**

Simulation et convergence de chaînes de Markov

1 Chaînes de Markov.

Définition 1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. à valeurs dans un espace E fini ou dénombrable. On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov si $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x_0, x_1, \cdots, x_{n+1} \in E$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

E s'appelle l'espace des états de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$.

Définition 2. On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène si $\forall x, y \in E$, la probabilité de transition de l'état x à l'état y est indépendante de n c.a.d. pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = P(x, y).$$

Pour caractériser la loi d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\geq 0}$, il suffit de connaitre la loi ν de X_0, appelée loi initiale de la chaîne, ainsi que la matrice de transition P donnée par

$$P = (P(x, y))_{x,y\in E}.$$

P est une matrice stochastique c.a.d. $\forall x, y \in E$, $P(x, y) \geq 0$ et la somme de chacune des lignes de P est égale à 1. Pour tout $n \geq 1$ et $\forall x_0, x_1, \cdots, x_n \in E$, on a

$$P(X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) = \nu(x_0)P(x_0, x_1)\cdots P(x_{n-1}, x_n).$$

Exercice 1. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ avec $0 < p < 1$ et, pour tout $n \geq 0$, soit $X_n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène dont on précisera la matrice de transition P. Créer un code Matlab permettant de simuler cette chaîne de Markov, où la valeur du paramètre p est affectée par l'utilisateur.

Théorème 1. Théorème de Perron-Frobenius. Toute chaîne de Markov homogène à valeurs dans un espace d'états fini E possède au moins une mesure invariante μ c.a.d. une mesure positive sur E telle que $\mu P = \mu$.

2 Convergence.

Définition 3. On dit qu'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est ergodique s'il existe une probabilité μ telle que, pour toute loi initiale ν, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers μ.

Théorème 2. Loi des Grands Nombres. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov ergodique et soit μ l'unique mesure invariante de la chaîne. Alors, pour toute fonction f intégrable pour μ et pour toute loi initiale ν, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) = \int_E f(x)\, d\mu(x) \qquad \text{p.s.}$$

Exercice 2. Une information sous la forme de oui ou non est transmise à travers n individus. On suppose que chaque intermédiaire transmet l'information avec la probabilité p et son contraire avec la probabilité $1-p$ où $0 < p < 1$. De plus, on suppose que les intermédiaires sont indépendants. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à deux états $E = \{-1, 1\}$ et déterminer sa matrice de transition P. Calculer de deux manières différentes la probabilité que le n^e individu transmette fidèlement l'information initiale et calculer sa limite lorsque n tend vers l'infini. Créer un code Matlab permettant d'illustrer cette convergence, où la valeur du paramètre p est affectée par l'utilisateur.

Exercice 3. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $E = \{0, 1\}$ et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a, b < 1$. Montrer que

$$P^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

puis déterminer la limite de P^n lorsque n tend vers l'infini. Calculer l'unique probabilité invariante μ de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$. Si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, montrer la convergence en probabilité sous μ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{a}{a+b}.$$

Créer un code Matlab permettant de simuler cette chaîne de Markov et d'illustrer ce résultat de convergence, où les paramètres a et b sont affectés par l'utilisateur.

Exercice 4. Soit d boules numérotées de 1 à d avec $d > 1$, réparties dans deux urnes A et B. On tire un nombre i au hasard entre 1 et d et la boule numéro i est changée d'urne. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A après n tirages indépendants. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène d'espace d'états fini $E = \{0, 1, \cdots, d\}$, appelée chaîne d'Ehrenfest. Déterminer sa matrice de transition P ainsi que son unique probabilité invariante μ. Montrer qu'il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que, $\forall x \in E$,

$$\sum_{y\in E} yP(x,y) = ax + b.$$

En déduire que $\mathbb{E}[X_n|X_0] \to d/2$. Créer un code Matlab permettant de simuler une chaîne d'Ehrenfest et d'illustrer ce résultat de convergence.

Exercice 5. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer l'unique probabilité invariante μ de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$. A partir de la loi des grands nombres, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} X_k = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} X_k^2 = b \qquad \text{p.s.}$$

avec a et b à déterminer. Créer un code Matlab permettant de simuler cette chaîne de Markov et de vérifier ces résultats de convergence.