Méthode de Monte-Carlo

1 Approximation numérique d'une intégrale.

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On se propose d'évaluer numériquement l'intégrale I définie par

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

A titre d'exemple, on évaluera l'intégrale entre 0 et 2π de la fonction f définie par

$$f(x) = \cos(x) \exp\left(-\frac{x}{5}\right) + 1.$$

On peut d'ailleurs calculer la valeur exacte de cette intégrale.

1.1 Méthodes déterministes.

On peut approcher I par une intégrale de Riemann, en discrétisant l'intervalle $[a, b]$. On peut alors arbitrairement construire les deux approximations suivantes :

$$I_1(n) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i), \qquad I_2(n) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}),$$

où $x_1 = a$ et $x_n = b$.

Exercice 1. En choisissant une discrétisation régulière, étudier $I_1(n)$ et $I_2(n)$ en fonction de n. On peut améliorer l'approximation, en approchant I par la méthode des trapèzes. Comparer l'approximation $I_3(n)$ obtenue avec cette méthode à $I_1(n)$ et $I_2(n)$. Représenter graphiquement les trois approximations obtenues en fonction de n.

1.2 Méthode de Monte-Carlo.

Cette méthode repose sur la loi des grands nombres. On définit un rectangle R de cotés $[a, b] \times [c, d]$ tel que $c \leq f(x) \leq d$ pour tout $a \leq x \leq b$. On choisit alors aléatoirement n points indépendants, avec une distribution uniforme dans le rectangle R.

Exercice 2. Quelle est la probabilité pour qu'un de ces n points soit sous la courbe de f ? En déduire un estimateur $\hat{I}_n$ de I. Montrer que cet estimateur peut s'écrire comme la moyenne empirique de n variables aléatoires indépendantes et équidistribuées. Que nous dit la Loi des Grands Nombres ? Utiliser cette méthode de Monte-Carlo pour évaluer I, en utilisant différentes tailles d'échantillon n. Donner à chaque fois un intervalle de confiance à 95%.

2 Approximation numérique du volume d'un convexe.

On peut bien sûr étendre ces méthodes à des situations plus compliquées, et évaluer, par exemple, le volume d'un convexe de $\mathbb{R}^d$, où $d > 2$. On se limitera ici au cas où $d = 3$ pour évaluer le volume V d'une sphère. Le principe est le même : on définit un cube qui contient la sphère, puis on génère n points indépendants dans ce cube, avec une distribution uniforme.

Exercice 3. Proposer un estimateur de V. Quelle est sa loi ? Utiliser cette méthode de Monte-Carlo pour évaluer V, avec différentes valeurs de n. Donner à chaque fois un intervalle de confiance à 95%.