Partiel du 22 mars 2006

Durée 3h-Aucun document autorisé-Calculatrices scientifiques autorisées

PROBLÈME

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de densité :

$$f(x) = C_{\alpha^*,\beta^*} x^{\frac{1}{\alpha^*}-1} \mathbf{1}_{[0,\beta^*]}(x), \quad \alpha^*, \beta^* > 0.$$

1) Calculer la constante C_{α^*,β^*}.

2) Calculer la fonction de vraisemblance associée aux observations $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{R}^+$. Montrer que la fonction log-vraisemblance est, pour $\alpha, \beta > 0$:

$$\begin{aligned} l_n(\alpha, \beta; X_1, \ldots, X_n) &= -n \log \alpha - \frac{n}{\alpha} \log \beta + (\frac{1}{\alpha} - 1) \sum_{i=1}^{n} \log X_i \qquad \text{si } \beta \geq \max_{i=1\ldots n} X_i, \\ &= -\infty \qquad \text{si } \beta < \max_{i=1\ldots n} X_i. \end{aligned}$$

3) On suppose que α^* est connu et β^* inconnu.

a) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\beta}_n$ de β^*.

b) Montrer que $\widehat{\beta}_n$ a pour densité :

$$g_n(t) = \frac{n}{\alpha^* \beta^*} \left(\frac{t}{\beta^*}\right)^{\frac{n}{\alpha^*}-1} \mathbf{1}_{[0,\beta^*]}(t).$$

$\widehat{\beta}_n$ est-il sans biais ?

c) Montrer que pour $t > \beta^*$ on a $P(|\widehat{\beta}_n - \beta^*| \geq t) = 0$. Tandis que pour $t \in [0, \beta^*]$:

$$P(|\widehat{\beta}_n - \beta^*| \geq t) = P(0 \leq \widehat{\beta}_n \leq \beta^* - t) = \left(1 - \frac{t}{\beta^*}\right)^{\frac{n}{\alpha^*}}.$$

En déduire que $\widehat{\beta}_n$ est un estimateur faiblement consistant.

d) Montrer, en utilisant c) que $n(\beta^* - \widehat{\beta}_n)$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\alpha^* \beta^*}$. On rappelle que

$$\lim_{u \to \infty} \left(1 - \frac{x}{u}\right)^u = e^{-x}, \; (x \in \mathbb{R}).$$

e) On suppose que $\alpha^* = \frac{1}{2}$ pour $n = 100$ et $(\max_{i=1\ldots n} X_i)^{\text{obs}} = 10$. Donner un intervalle de confiance de niveau approximatif 5% pour β^*.

4) On suppose maintenant que β^* est connu et α^* inconnu.

a) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\alpha}_n$ de α^*.

b) $\widehat{\alpha}_n$ est-il biasé ?

c) Montrer que $\widehat{\alpha}_n$ est un estimateur consistant.

d) Calculer $\sigma^2 = \text{var}\,(\log X_1)$ et déterminer la loi limite de

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{\alpha}_n - \alpha^*)}{\sigma}.$$

e) On suppose que $\beta^* = 1$ et $n = 100$, on a observé $(\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \log X_i)^{\text{obs}} = -15$. Donner un intervalle de confiance de niveau approximatif 5% pour α^* (on pourra utiliser le théorème de Slutsky).

f) Calculer l'information de Fisher du modèle. $\widehat{\alpha}_n$ est-il un estimateur efficace ?

5) On suppose maintenant que α^* et β^* sont inconnus.

a) En utilisant les questions 3.a) et 4.a), montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de (α^*, β^*) est

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{\beta}}_n &= \max_{i=1\ldots n} X_i \\
\widehat{\widehat{\alpha}}_n &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \frac{X_i}{\widehat{\widehat{\beta}}_n}.
\end{aligned}$$

b) En exprimant $\widehat{\widehat{\beta}}_n$ et $\widehat{\widehat{\alpha}}_n$ en fonction de $\widehat{\beta}_n$ et $\widehat{\alpha}_n$, montrer que $\widehat{\widehat{\alpha}}_n$ et $\widehat{\widehat{\beta}}_n$ sont des estimateurs faiblement consistants.

Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$: $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$

x	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000