INSA-GMM
Simulation Stochastique
2005-2006

TP de MATLAB du mardi 13 juin 2006
Le filtre de Kalman

1. Un modèle physique

Un modèle souvent utilisé pour représenter des déplacements ayant une certaine forme de régularité dans le plan consiste à supposer que les composantes de vitesse (en abscisse et en ordonnée de l'objet d'intérêt (que l'on supposera ponctuel) sont indépendantes et quasi constantes. On notera ici $F(t)$ et $G(t$ les positions en abscisse et en ordonnée de l'objet d'intérêt (pour éviter la confusion avec les variables du modèle d'état, on évite d'utiliser x et y) ainsi que $F'(t), F''(t)$ leurs dérivées par rapport à la variable de temps t supposée, dans un premier temps, continu afin que les dérivées soient bien définies. L'état de notre système dynamique à temps discret sera constitué des valeurs échantillonnées régulièrement des positions et vitesses :

$$(F_k, G_k, \overline{F}_k, \overline{G}_k) = (F(k\delta), G(k\delta), F'(k\delta), G'(k\delta))$$

où δ désigne le pas de discrétisation. Pour simplifier les arguments liés à la discrétisation, on supposera que l'on peut utiliser l'approximation suivante $F(t) \approx F(k\delta)$ pour $t \in [k\delta, (k+1)\delta[$, où la séquence $F''(k\delta)$, $k \in \mathbb{N}$ sera modélisée comme un bruit blanc de variance σ^2. Montrer qu'en définissant l'état du système par le vecteur position vitesse de dimension 4

$$X_k = (F_k, G_k, F'_k, G'_k)^T.$$

le modèle de dynamique a priori de l'état se met sous la forme

$$X_{k+1} = AX_k + RU_k$$

où (U_k) est un bruit blanc bidimensionnel de matrice de covariance l'identité. C'est-à-dire $E[U_k U_j^T] = 02$ quand $k \neq j$ et $E[U_k U_k^T] = I_2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } R = \sigma \begin{pmatrix} \frac{\delta^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\delta^2}{2} \\ \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

Dans la suite, on utilisera la valeur $\delta = 1$. Pour le modèle d'observation, on considérera une observation bruitée de la position uniquement (pas de la vitesse) :

$$Y_k = BX_k + SV_k.$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $S = \rho I2$ où ρ est un paramètre d'échelle scalaire et V_k est un bruit blanc bidimensionnel de matrice de covariance l'identité. Pour créer simplement des trajectoires à estimer on utilisera le code suivant

```
clf;
axis([0 100 0 100]);
[Px,Py] = ginput;
n = 100;
```

```
BX = spline((1:length(Px)), [Px Py]', linspace(1,length(Px),n));
clf;
plot(BX(1,:), BX(2,:), 'ko');
Y = BX + rho*randn(2,n);
hold on;
plot(Y(1,:), Y(2,:), '*');
```

avec `rho =3`. On commentera le fonctionnement du code cidessus en réfléchissant notamment à la façon dont on peu contrôler la *vitesse* de l'ob jet se déplaçant le long de la trajectoire créée. La commande `axis([0 100 0 100]` est conventionnelle, elle permet simplement de fixer une échelle compatible avec la valeur de σ donnée ci-dessous.

Implémenter le filtrage de Kalman correspondant au modèle décrit ci-dessus. Pour l'état initial on considérera un a priori *peu informatif* (on commentera cette affirmation) de la forme $E(X_0) = 0$, $\text{var}(X0) = \kappa I_2$ où $\kappa >> \rho$. On veillera notamment à :

1) Interpréter les résultats obtenus dans le cas de trajectoires simples (rectilignes, avec vitesse uniforme ou non, rectilignes avec virage brusques, etc.).
2) Bien mettre en évidence l'influence du paramètre σ Ũ on commencera par prendre $\sigma = 0.05$ (on notera en particulier que dans une application du type de celle présentée schématiquement ici, s'il est envisageable de calibrer ρ, σ doit être fixé en fonction d'autres considérations...).
3) Réfléchir à des façons envisageables d'améliorer le modèle de dynamique utilisé.