Examen

L.I.M.-Statistique

Septembre 2004

1 Exhaustivité

On observe un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi P_θ de densité

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}(1-x)^{\frac{1}{\theta}-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x), \quad \theta \in \mathbb{R}_*^+.$$

1) Calculer la vraisemblance du modèle et donner une statistique exhaustive.
2) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance T_n de θ.
3) On pose $Z = -\log(1-X)$. Montrer que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
4) Donner en les justifiant les propriétés de T_n : risque quadratique, consistance, optimalité. T_n est-il un estimateur efficace ?

2 Wishart

Soit $X = (X^{(1)}, X^{(2)})$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de loi normale $\mathcal{N}_2(0, \sigma^2 A(\theta))$ où $A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}$, avec $\theta \in]0, \pi[$ et $\sigma > 0$. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon ayant la même loi que X.

a) Montrer que la vraisemblance associée à ces observations est :

$$f(x_1, \ldots, x_n; \theta, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^n (\sin\theta)^n \sigma^{2n}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} x_j^T A^{-1}(\theta) x_j\right], \quad x_j^T = (x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) \in \mathbb{R}^2, \quad j = 1 \ldots n.$$

b) On suppose que θ est connu, quel est alors l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\sigma}_n^2$ de σ^2. Montrer que, $\widehat{\sigma}_n^2$ est un estimateur convergeant.

c) Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^{(1)} X_j^{(2)}$ est un estimateur sans biais de $\sigma^2 \cos\theta$.

3 Pizza

On désire comparer le nombre moyen d'olives par pizza dans deux restaurants différents. On appelle X_i (respectivement Y_i) le nombre d'olives pour la pizza i dans le restaurant A (resp. dans le restaurant B). On observe 100 pizzas dans chacun des restaurants. Les données réduites sont les suivantes :

$$n = 100; \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 601,66 \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 640,8$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 240,22 \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 245,66.$$

Quel restaurant choisira un amateur de pizza avec olives ? On indiquera clairement le modèle statistique utilisé.