UPS - Toulouse - Licence d'Ingénierie Mathématique
Examen de Probabilités du 16 Mai 2003

La durée de l'épreuve est 2h-Pas de document autorisé- Calculatrices UPS autorisées.

1 Question de cours

Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^k$, $(k \geq 2)$. On suppose que X est centré de matrice de variance-covariance l'identité. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^k$. Soit u, v deux vecteurs orthogonaux et normés de $\mathbb{R}^k$.

a) Quelle est la loi du couple $(\langle u, X \rangle,\ \langle v, X \rangle)$?

b) Quelle sont les lois des variables suivantes :

- $\langle u, X \rangle^2 + \langle v, X \rangle^2$,
- $\dfrac{\langle u, X \rangle}{\langle v, X \rangle}$?

2 Renouvellement

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1 ($\mathcal{E}(1)$). C'est-à-dire que X_1 a pour densité :

$$f_{X_1}(x) = \exp(-x)\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x).$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Calculer la fonction caractéristique φ_{X_1} de X_1. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, celle de S_n.

b) En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégrale, montrer par récurrence sur l'entier strictement positif n, l'identité :

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} e^{itx} dx = \frac{(n-1)!}{(1-it)^n} \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

c) En utilisant les questions précédentes, montrer que la densité de S_n est

$$f_{S_n}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-x)\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*).$$

d) On considère maintenant, pour $t \in \mathbb{R}^*$, la variable aléatoire :

$$N_t = \sum_{j \geq 1} \mathbb{I}_{\{S_j \leq t\}}.$$

Montrer, pour $k \in \mathbb{N}$, l'identité $\mathbb{P}(N_t > k) = \mathbb{P}(S_{k+1} \leq t)$. Quelle est la loi de N_t ($t \in \mathbb{R}^*$)?

3 Estimateur à noyau

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de densité f continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé et (h_n) une suite de réels strictement positifs qui décroît vers 0. On suppose que la suite (nh_n) diverge vers $+\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{aligned} \widehat{f}_n(x_0) &= \frac{1}{2nh_n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{[x_0-h_n, x_0+h_n]}(X_j), \\ p_n(x_0) &= \mathbb{P}\left(X_1 \in [x_0 - h_n, x_0 + h_n]\right) = \int_{x_0-h_n}^{x_0+h_n} f(t)dt. \end{aligned}$$

a) Montrer que les suites $(p_n(x_0))$ et $\left(\frac{p_n(x_0)}{2h_n}\right)$ convergent respectivement vers 0 et $f(x_0)$.

b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $2nh_n\widehat{f}_n(x_0)$ suit une loi binomiale de paramètres à préciser. En déduire l'espérance et la variance de $\widehat{f}_n(x_0)$.

c) Montrer que $(\widehat{f}_n(x_0))$ converge en probabilité vers $f(x_0)$.
Indication : On pourra montrer que $(\widehat{f}_n(x_0) - f(x_0))$ tend vers 0 en moyenne quadratique.