UPS - Toulouse - Licence d'Ingénierie Mathématique
Correction de l'examen de Probabilités du 10 septembre 2003

1. Distance à l'origine

Notons F_X la fonction de répartition de X. On a directement que, pour $t \leq 0$, $F_X(t) = 0$ et pour $t \geq 1$, $F_X(t) = 1$. D'autre part, pour $t \in]0, 1[$,

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \frac{1}{\pi}\int_{D_t} dxdy = \frac{\pi t^2}{\pi} = t^2,$$

où D_t désigne le disque de centre 0 et de rayon t. Par dérivation, on en déduit que la densité de X est :

$$f_X(x) = 2x\mathbb{I}_{]0,1[}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Les deux premiers moments de X sont $\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}$. D'où $\mathrm{var}X = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$ et $\sigma(X) = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

2. Dé

a) Puisque le dé est supposé être équilibré, la loi de X est la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, l\}$. On a donc, pour $x \in \{1, \ldots, l\}$, $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{l}$. On en déduit les deux premiers moments de X:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{j=1}^{l} j\mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} j = \frac{l(l+1)}{2l} = \frac{l+1}{2},\\
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{j=1}^{l} j^2\mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} j^2 = \frac{l(l+1)(2l+1)}{6l} = \frac{(l+1)(2l+1)}{6}.
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\mathrm{var}X = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{(l+1)(2l+1)}{6} - \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 = \frac{l^2-1}{12}.$$

b) Comme $l = 10$, on obtient dans les formules précédentes $\mathbb{E}(X) = 5.5$ et $\mathrm{var}X = \frac{99}{12}$. Le théorème de la limite centrale permet donc d'approximer la loi de $\sqrt{100}(\overline{X} - 5.5)$ par la loi normale centrée de variance $\frac{99}{12}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{X} \leq 4) &= \mathbb{P}\left(\frac{10(\overline{X} - 5.5)}{\sqrt{\frac{99}{12}}} \leq \frac{10(4 - 5.5)}{\sqrt{\frac{99}{12}}}\right)\\
&\approx \mathbb{P}(V < -5.23) \approx \frac{\exp\left(-\frac{(5.23)^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}(5.23)} \approx 8 \cdot 10^{-9}.
\end{aligned}$$

3. Processus A.R.

a) α) On montre facilement par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} \theta^j \varepsilon_{n-j}. \tag{1}$$

β) En utilisant (1), l'équidistribution et l'indépendance de la suite (ε_n), on obtient pour $\theta \neq -1, 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} \theta^j \varepsilon_{n-j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \theta^j \mathbb{E}(\varepsilon_{n-j}) = p \sum_{j=1}^{n} \theta^j = \frac{p\theta(1-\theta^n)}{1-\theta}, \\
\mathrm{var} X_n &= \mathrm{var}\left(\sum_{j=1}^{n} \theta^j \varepsilon_{n-j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \theta^{2j} \mathrm{var}\varepsilon_{n-j} = p(1-p) \sum_{j=1}^{n} \theta^{2j} = \frac{p(1-p)\theta^2(1-\theta^{2n})}{1-\theta^2}.
\end{aligned}$$

γ) Ces paramètres convergent si, et seulement si, $|\theta| < 1$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{p\theta(1-\theta^n)}{1-\theta} = \frac{p\theta}{1-\theta}, \\
\lim_{n\to\infty} \mathrm{var} X_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)\theta^2(1-\theta^{2n})}{1-\theta^2} = \frac{p(1-p)\theta^2}{1-\theta^2}.
\end{aligned}$$

b) Si Z est une variable aléatoire on note F_Z sa fonction de répartition. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $F_{X_0}(t) = t,\ (t \in [0,1])$, $F_{X_0}(t) = 0,\ (t < 0)$ et $F_{X_0}(t) = 1,\ (t > 1)$. La formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned}
F_{X_1}(t) &= \mathbb{P}(X_1 \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t | \varepsilon_0 = 0)\mathbb{P}(\varepsilon_0 = 0) + \mathbb{P}(X_1 \leq t | \varepsilon_0 = 1)\mathbb{P}(\varepsilon_0 = 1) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_0 \leq 2t) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_0 \leq 2t-1) = \frac{1}{2}[F_{X_0}(2t) + F_{X_0}(2t-1)].
\end{aligned}$$

- Si $t > 1$, $2t$ et $2t-1$ sont aussi supérieurs à 1. Donc, $F_{X_1}(t) = 1$.
- Si $t < 0$, $2t$ et $2t-1$ sont aussi inférieurs à 0. Donc, $F_{X_1}(t) = 0$.
- Si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ on a $0 \leq 2t \leq 1$ et $2t - 1 \leq 0$. Donc $F_{X_1}(t) = \frac{1}{2} \cdot 2t = t$.
- Si $\frac{1}{2} < t \leq 1$ on a $1 < 2t$ et $0 \leq 2t-1 \leq 1$. Donc $F_{X_1}(t) = \frac{1}{2}(1 + 2t - 1) = t$.

On conclut que $F_{X_1} = F_{X_0}$. Une récurrence immédiate donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{X_n} = F_{X_0}$. X_n suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

4. Exponentielle double

a) Pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= \mathbb{E}[\exp(itZ)] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \exp(-|z| + itz)dz \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^-} \exp[z(1+it)]dz + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^+} \exp[z(it-1)]dz \\
&= \left[\frac{\exp[z(1+it)]}{2(1+it)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{\exp[z(it-1)]}{2(it-1)}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2(1+it)} + \frac{1}{2(1-it)} = \frac{1}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

b) La fonction $l(x)\exp(-|z|)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Fubini donne alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{l(x)}{1+x^2} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{l(x)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 l(x)\varphi_Z(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} l(x)\int_{\mathbb{R}} \exp(-|z| + ixz)dzdx \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} l(x)\int_{\mathbb{R}} \exp(-|z|)\cos(xz)dzdx = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \cos(xz)l(x)\exp(-|z|)dxdz.
\end{aligned}$$

c) Prenons $l(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$ et appliquons à nouveau le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \cos(xz)l(x)\exp(-|z|)dxdz &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|z|)\int_{-1}^1 \cos(xz)dxdz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|z|)\left[\frac{\sin(xz)}{z}\right]_{-1}^1 dz \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|z|)\frac{\sin z}{z}dz \\
&= 4\int_0^{+\infty} \exp(-z)\frac{\sin z}{z}dz = 4J.
\end{aligned}$$

En utilisant la question b), on obtient

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\text{artan}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$