IUFM de Toulouse
Préparation au CAPES de Maths
2002-2003

Problème encadré de Probabilités

1 Lois Béta

On considère le domaine A du plan :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 < y < 1, \ x \in]-1, 1[\right\}$$

1) Soit C l'aire de l'ensemble A. Calculer C.

2) On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité :

$$f(x, y) = \frac{\mathbb{I}_A(x, y)}{C}.$$

Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? Calculer les lois marginales de X et Y ainsi que leurs espérances et variances.

3) Montrer que l'application ψ de A dans $]0, 1[^2$ définie par

$$\psi(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x+1}{2} \\ \dfrac{y - x^2}{1 - x^2} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A$$

est bijective. On pose

$$\begin{cases} U = \dfrac{X+1}{2} \\ V = \dfrac{Y - X^2}{1 - X^2} \end{cases}$$

Quelle est la loi de (U, V)? Les variables U et V sont-elles indépendantes? Donner leurs lois marginales.

2 Autour des records

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de densité f. Dans ce cadre on rappelle que l'on a, pour $1 \leq i < j \leq n$,

$$\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0. \tag{1}$$

Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on considère le rang relatif R_j de X_j :

$$R_j = 1 + \text{Cardinal}\{i \in \{1, .., j\} : \ X_i > X_j\} = 1 + \sum_{i=1}^{j} \mathbb{I}_{\{X_i > X_j\}}.$$

C'est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, .., j\}$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1,..,n\}$. On pose, pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$,

$$E_\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \ x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \ldots < x_{\sigma(n)} \right\}.$$

On note

$$F = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \ x_i = x_j \right\}.$$

Montrer ou admettre que $[(E_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}_n}, F]$ est une partition de $\mathbb{R}^n$. En déduire en utilisant (1) que, pour $n \geq 2$, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}(X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \ldots < X_{\sigma(n)}) = 1.$$

Puis que, pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$,

$$\mathbb{P}(X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \ldots < X_{\sigma(n)}) = \frac{1}{n!}.$$

b) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $r = (r_j)_{1 \leq j \leq n}$ avec $r_j \in \{1, 2, \ldots, j\}$. Montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ qu'il existe une unique permutation $\sigma_r \in \mathcal{S}_n$ avec

$$\mathbb{P}(R_1 = r_1, R_2 = r_2, \ldots, R_n = r_n) = \mathbb{P}(X_{\sigma_r(1)} < X_{\sigma_r(2)} < \ldots < X_{\sigma_r(n)}).$$

c) En utilisant les questions précédentes, montrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, les variables $R_1, \ldots, R_n$ sont indépendantes. Monter que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(R_n = r_n) = \frac{1}{n}, \ r_n \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Calculer l'espérance et la variance de R_n.
Indication : on rappelle que

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d) Soit $j \in \mathbb{N}^*$, si $R_j = 1$ on dit qu'il se produit un record à l'instant j. Commenter cette appellation. On s'intéresse maintenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, à la variable aléatoire Z_n comptant le nombre de records jusqu'à l'instant n :

$$Z_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{\{R_j = 1\}}.$$

Montrer que la suite (Z_n) est croissante, calculer l'espérance et la variance de Z_n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

e) En utilisant des aires construites à partir de la fonction $1/x$, $(x \in \mathbb{R}_+^*)$, montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{dx}{x}.$$

En déduire que, lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sim \log n.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{Z_n}{\log n}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{Z_n}{\log n}\right) = 0.$$

En déduire que la variable aléatoire $\frac{Z_n}{\log n}$ tend vers 1 en probabilité.