UPS - Toulouse - Licence d'Ingénierie Mathématique

Examen de Probabilités du 27 Mai 2002

La durée de l'épreuve est 2h-Pas de document autorisé- Calculatrices UPS autorisées.

1 Lois Béta

On considère le domaine A du plan :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq y \leq x, \ x \in [0,1] \right\}$$

1) Soit C l'aire de l'ensemble A. Calculer C.
2) On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité :

$$f(x,y) = \frac{\mathbb{1}_A(x,y)}{C}.$$

   Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
3) On pose

$$\begin{cases} U = X \\ V = \dfrac{Y - X^2}{X(1-X)} \end{cases}$$

   Quelle est la loi de (U, V) ? Montrer que les variables U et V sont indépendantes et donner leurs lois marginales.

2 Chaîne de Markov

Pour $\theta \in [0,1]$, on considère la chaîne de Markov sur $E = \{1,2,3\}$ d'état initial $X_0 = 1$ et de matrice de transition

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\theta}{2} & \frac{1}{2}(1-\theta) \\ \theta & 1-\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Discuter suivant la valeur de θ de la nature des états et de la chaîne.
2) On suppose que $\theta = 1$. Calculer $\mathbb{P}_1(X_4 = 1)$.
3) On suppose que $\theta = 0.5$. Que vaut la limite presque sûre de $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j$?

3 Cauchy

Rappels préliminaires

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Rappelons que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est définie par l'intégrale :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \exp(i\omega x) f(x) dx, \ \ (\omega \in \mathbb{R}).$$

On rappelle par ailleurs, que lorsque $\widehat{f}$ est intégrable on a la formule d'inversion :

$$\textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\omega x) \widehat{f}(\omega) d\omega.$$

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle double. C'est-à-dire que X a pour densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \exp -|x|, (x \in \mathbb{R}).$$

Soit Y une variable aléatoire de loi de Cauchy. Y a pour densité

$$f_Y(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, (x \in \mathbb{R}).$$

1) Calculer la fonction caractéristique de X et en déduire celle de Y.
2) Soit Y_1, Y_2 deux variables aléatoires indépendantes toutes deux de même loi que Y. Quelle est la loi de $\frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)$?
3) Soit (Y_n) une suite i.i.d. de loi de Cauchy et soit $\overline{Y_n}$ la moyenne empirique construite à partir de $Y_1 \dots Y_n$:

$$\overline{Y_n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j.$$

Quelle est la loi de $\overline{Y_n}$? Ce résultat contredit-il la loi forte des grands nombres ?