DEA de Mathématiques Appliquées
Examen de Grandes Déviations
2001-2002

Epreuve du 10 juin 2002

1 Questions de cours

1) Soit (W_n) une suite de variables aléatoires positives et (u_n) une suite de réels strictement positifs qui décroît vers 0. On suppose que la loi de W_n ne charge pas les points que pour tout $t \geq 0$ on a

$$\lim_{n \to \infty} u_n \log \mathbb{P}(W_n \geq t) = -I(t),$$

où I est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ strictement croissante et semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}^+$.

a) Pour $t > \varepsilon > 0$ on pose $R_\varepsilon =]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$. Montrer que, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(W_n > t - \varepsilon) > 0$, alors on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathbb{P}(W_n > t+\varepsilon)}{\mathbb{P}(W_n > t-\varepsilon)} = 0.$$

Calculer alors $\lim_{n \to \infty} u_n \log \mathbb{P}(W_n \in R_\varepsilon)$. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^+$. Minorer la limite inférieure de $u_n \log \mathbb{P}(W_n \in O)$.

b) Soit F un fermé de $\mathbb{R}^+$. Utiliser i) pour majorer la limite supérieure de $u_n \log \mathbb{P}(W_n \in F)$.

c) Montrer que (W_n) satisfait un principe de grandes déviations pour la vitesse u_n^{-1}. On précisera la fonction de taux.

2) Considérons 2 suites de variables aléatoires réels. On suppose que ces suites sont indépendantes et que chacune d'elle satisfait un principe de grandes déviations avec une bonne fonction de taux. Montrer que la somme de ces deux suites satisfait aussi un principe de grandes déviations et préciser la bonne fonction de taux de ce principe.

2 Déviations modérées pour l'inf d'un échantillon

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que la loi de X_1 possède une densité f avec f strictement positive et continue sur $[0, \varepsilon]$ pour un $\epsilon > 0$. On pose $Y_n = \min_{i=1,\ldots,n} X_i$. Soit (a_n) une suite décroissante de réels qui converge moins vite que n^{-1} vers 0 ($n = o(a_n)$).

a) Montrer que Y_n possède une densité g_n à déterminer. Montrer que Y_n converge en loi et en probabilité vers 0.

b) En utilisant la question a) et la question de cours, montrer que la suite $(a_n^{-1}Y_n)$ satisfait un P.G.D pour la vitesse na_n. Quelle est la fonction de taux J. Cette fonction est-elle bonne?

c) Calculer pour $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{na_n} \log \int_{[0,1]^n} \exp(\frac{n}{a_n}\alpha(\min_{i=1,\dots,n} x_i)^2)dx_1 \cdots dx_n.$$

3 Autour du théorème de Wigner

Quelques rappels sur les matrices carrées

Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ une matrice $n \times n$ à coefficients réels. Sa trace notée $\mathrm{Tr}(A)$ est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

La tranposée de la matrice A notée A^T est la matrice dont les colonnes sont les lignes de A. La matrice A est symétrique si $A = A^T$. Si A est symétrique elle est diagonalisable. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels on note $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont dans l'ordre $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Définitions et hypothèses

On considère un tableau triangulaire $N = (N_{i,j})_{i\ge 1, 1\le j\le i}$ de variables i.i.d. de loi normale centrée réduite. Soit $\tilde{N}_n$ la matrice triangulaire inférieure $n \times n$ construite à partir de N dont les éléments diagonaux sont nuls :

$$\tilde{N}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ N_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{n,1} & N_{n,2} & \dots & N_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce problème on considère, pour $\theta > 0$, la matrice aléatoire

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\tilde{N}_n + \tilde{N}_n^T + \theta \mathrm{Diag}(N_{1,1}, N_{2,2}, \dots, N_{n,n}) \right].$$

Cette matrice est symétrique par construction, elle est donc diagonalisable. On note $\mu_1^n \dots \mu_n^n$ ses valeurs propres et l'on considère la mesure empirique ν_n associée :

$$\nu_n(dx) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{\mu_j^n}(dx).$$

Le théorème de Wigner étudie la convergence de (ν_n). On se limitera ici au propriétés de grandes déviations des deux premiers moments de la mesure aléatoire ν_n :

$$\begin{aligned} Z_n^1 &= \int x\nu_n(dx) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mu_j^n, \\ Z_n^2 &= \int x^2\nu_n(dx) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (\mu_j^n)^2. \end{aligned}$$

1) Soit A et B des matrices carrées $n \times n$ montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. En déduire que la trace d'une matrice est invariante par changement de base. Exprimer alors à partir d'éléments du tableau N les deux premiers moments Z_n^1 et Z_n^2.

2) Calculer la transformée de Laplace de Z_n^1. Montrer que (Z_n^1) satisfait un principe de grandes déviations pour la vitesse n^2. Montrer que la fonction de taux est bonne.

3) On suppose que $\theta = \sqrt{2}$. Reprendre la question précédente en remplaçant Z_n^1 par Z_n^2.

4) On ne suppose plus que $\theta = \sqrt{2}$. On pose $T_n = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n N_{j,j}^2$.

   a) Montrer que, pour $t > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(T_n > t) = \frac{t}{2}.$$

   En utilisant le paragraphe 1 (question de cours), montrer que (T_n) satisfait un principe de grandes déviations (pour la vitesse n^2). Préciser la bonne fonction de taux.

   b) Montrer que $(Z_n^2 - \theta^2 T_n)$ est indépendante de (T_n) et satisfait un principe de grandes déviations.

   c) Utiliser les questions a) et b) et le paragraphe 1 pour montrer que (Z_n^2) satisfait un principe de grandes déviations. Représenter graphiquement la fonction de taux.