UPS - Toulouse - Licence d'Ingénierie Mathématique

Examen de Probabilités du 6 septembre 2001

La durée de l'épreuve est 2h-Pas de document autorisé- Calculatrices UPS autorisées.

1 Approximations de la loi binomiale (sur 5 points)

Soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \theta_n)$, $(n \in \mathbb{N}^*, 0 < \theta_n < 1)$.

1) On suppose que la suite θ_n est constante. Soit θ cette constante. Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n - n\theta}{\sqrt{n}} < t\right) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\theta(1-\theta)}\right)}{\sqrt{2\pi\theta(1-\theta)}} dx. \tag{1}$$

2) On ne suppose plus que la suite θ_n est constante. Mais on suppose que

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_n = \lambda > 0.$$

Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{2}$$

3) La mutation d'un certain gène a une probabilité p d'être présente chez un individu donné. On observe un échantillon de $n = 10000$ individus. En expliquant soigneusement la modélisation utilisée, donner une approximation numérique des probabilités suivantes :

   a) $\mathbb{P}$(Observer au moins un mutant), si l'on suppose que la mutation du gène est très rare, $p = 10^{-4}$,

   b) $\mathbb{P}$(Observer plus de 3021 mutants), si l'on suppose que la mutation du gène est fréquente, $p = 0.3$.

2 Chaîne de Markov à 2 états (sur 5 points)

Un signal binaire à valeurs dans $\{0, 1\}$ est transmis sur une ligne comportant N relais. Pour $n = 1, \ldots, N$, on note X_n la valeur du signal à la sortie du relais n. A chaque passage de relais le signal peut subir une altération avec une probabilité $p \in]0, 1[$. C'est-à-dire que si x est la valeur du signal à l'entrée d'un relais, il y a une probabilité p que le signal à la sortie de ce relais vaille $1 - x$ et une probabilité $1 - p$ qu'il vaille x. On suppose que les erreurs commises entre les relais sont indépendantes et sont aussi indépendantes du signal initial X_0.

1) Montrer que $(X_n)_{n\leq N}$ est une chaîne de Markov irréductible.

2) La chaîne est-elle récurrente ou transiente?

3) Montrer que la probabilité invariante est la loi de Bernoulli de paramètre 0.5. Quelle est la limite en loi, quand N tend vers l'infini, de X_N? Donner une interprétation intuitive de ce résultat.

3 Somme arrêtée (sur 10 points)

Soit (θ_n) une suite de réels strictement positive qui décroît vers 0. On considère une variable aléatoire N_n de loi géométrique translatée de paramètre $1-\theta_n$:

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \theta_n(1-\theta_n)^{k-1}, \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de carré intégrable, indépendante de la variable N_n. On suppose que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathrm{var} X_1 = 2$. On notera φ_X la fonction caractéristique de X_1. On pose

$$S_n = \sqrt{\theta_n}\sum_{j=1}^{N_n} X_j.$$

1) Calculer la fonction génératrice de la variable N_n.

2) Soit ψ une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[\psi(S_n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{N_n=k\}}\psi(S_n)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\psi\left(\sqrt{\theta_n}\sum_{j=1}^{k} X_j\right)\right]\mathbb{P}(N_n = k).$$

3) Soit φ_{S_n} la fonction caractéristique de S_n. En utilisant les questions 1) et 2) montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{S_n}(t) = \frac{\theta_n \varphi_X(t\sqrt{\theta_n})}{1-(1-\theta_n)\varphi_X(t\sqrt{\theta_n})}.$$

4) Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (1/2)\exp(-|x|)$. Montrer que h est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit Z une variable aléatoire de densité h. On dit que Z suit la loi exponentielle double. Calculer la fonction caractéristique de Z. En déduire son espérance et sa variance.

5) Montrer que, au voisinage de 0, on a

$$\varphi_X(t) = 1 - t^2 + o(t^2).$$

Montrer que la fonction φ_{S_n} converge, quand n tend vers l'infini, vers une limite à préciser. En déduire que S_n converge en loi vers la loi exponentielle double.