Licence Ingénierie : Probabilités

Feuille de TD n°4 Année 2000/2001

Exercice 1 : Etudier la convergence presque sûre, en probabilité, dans L^1 et en loi des suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ suivantes :

1. $X_n = u_n 1_{\{X\in[0,1/n]\}}$ où X est une v.a. suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels quelconques.
2. Les X_n sont des v.a. indépendantes de même loi donnée par $P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = \frac{1}{n}$.
3. $X_n = -X$ où X est une v.a. normale centrée réduite et l'on étudie la convergence de X_n vers X.

Exercice 2 : Montrer les propriétés suivantes :

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}, (Y_n)_{n\geq 0}$ deux suites indépendantes de v.a. convergeant en probabilité respectivement vers X et Y. Alors $(X_n + Y_n)$ converge en probabilité vers $X+Y$.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite convergeant en probabilité vers une constante a et f une fonction continue en a. Montrer que $(f(X_n))_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers $f(a)$.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite convergeant en probabilité vers une v.a. réelle X et (a_n) une suite de réels convergeant vers a. Montrer que $(a_n X_n)$ converge en probabilité vers aX.

Exercice 3 : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. On note $I_n = \inf_{i=1,\ldots,n} X_i$ et $S_n = \sup_{i=1,\ldots,n} X_i$.

1. Etudier la convergence en loi, en probabilité et en moyenne quadratique de I_n.
2. Etudier la convergence en loi de $Y_n = n(1-S_n)$.

Exercice 4 : Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, positive et telle que $\sup_{x\in[0,1]} f(x) = m < 1$.

On pose $p = \int_0^1 f(x)\,dx$. Soit $Z_i = (X_i, Y_i)$, $i = 1,\ldots,n$, n v.a.i. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et de loi uniforme sur $[0,1]^2$. Soit $D = \{(x,y)\in[0,1]^2,\ y \leq f(x)\}$. On pose pour tout $\omega\in\Omega$ et pour tout $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, $T_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z_i(\omega)\in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Soit $U_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$. Déterminer la loi de U_n, puis $\mathrm{E}(U_n)$ et $\mathrm{Var}(U_n)$.
2. Montrer que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{ps}} p$ et que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} p$.

3. Donner une majoration de $p(1-p)$ pour tout $p \in [0,1]$. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour déterminer la valeur minimale n_0 de n telle que $\mathrm{P}(|U_n - p| \geq 0{,}01) \leq 0{,}005$.

Exercice 5 : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. réelles telles que, pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi normale $N(0,\frac{1}{n^2})$.

1. Etudier la convergence en loi de cette suite ; on notera X sa limite.
2. Peut-on dire que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = 0) = \mathrm{P}(X = 0)$?

Exercice 6 : Soit, pour tout entier $n \geq 1$, X_n une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ de loi de Poisson de paramètre n.. On pose $Z_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$. Calculer la fonction caractéristique de Z_n. Démontrer que Z_n converge en loi vers une v.a. normale de moyenne 0 et de variance 1. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 7 : Soit $X, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(X=-1) = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que $\mathbf{E}\left(e^{\alpha X}\right) \leq e^{\frac{\alpha^2}{2}}$. En déduire $\mathbf{E}\left(e^{\alpha S_n}\right) \leq e^{\frac{n\alpha^2}{2}}$.
2. En déduire en utilisant l'inégalité de Markov que $\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} > \lambda\right) \leq e^{-\frac{n\lambda^2}{2}}$ pour tout n et tout λ positif. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Donner un équivalent pour n grand de $\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{3}{2\sqrt{n}}\right)$ (On pourra utiliser le théorème central limite).
4. Comparer numériquement les trois approximations obtenues. (On donne $F(\frac{3}{2}) = 0.9332$ où F est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.)