UPS - Toulouse - Licence d'Ingénierie Mathématique

Probabilités - Feuille 3

Exercice 1.

Soient X et Y deux v.a. indépendantes de densité exponentielle de paramètres respectifs α et β, $\alpha \neq \beta$. Montrer que $X+Y$ a la densité :

$$f(x) \;=\; \alpha\beta \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{\beta - \alpha} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Exercice 2.

Soit X une v.a.r. de densité définie par :

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit une loi log-normale de paramètres (m, σ^2) et on note $X \sim \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

1. Soit $X \sim \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ en utilisant l'expression de la densité d'une loi normale convenablement choisie.

2. On pose $Y = cX^d$, avec c et d réels strictement positifs. Montrer que Y est une v.a.r. suivant une loi log-normale de paramètres à déterminer.

3. En déduire $Var(X)$.

Exercice 3.

Soit a et λ deux réels strictement positifs.

1. Montrer que :

$$\Gamma(a) \;=\; \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx \;<\; \infty.$$

2. Montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. En déduire $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \frac{\lambda^a e^{-\lambda x} x^{a-1}}{\Gamma(a)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Vérifier que f est une densité de probabilité. Soit X une v.a.r. de densité f : on dit que X suit une loi gamma de paramètres a, λ, notée $G(a, \lambda)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

4. Soit Y une v.a.r. suivant une loi normale centrée réduite. Montrer que Y^2 suit une loi $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (c'est-à-dire une loi de χ^2 à 1 degré de liberté). En déduire la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Exercice 4.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de loi conjointe définie par :

$$f_{X,Y}(x, y) \;=\; \begin{cases} a^2 e^{-ay} & \text{si} \quad 0 < x < y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$, puis celle de X sachant $Y = y$.
3. Déterminer la densité du couple $(X, Y - X)$.
4. Déterminer la densité du couple $(X, 2X - Y)$.
5. En déduire la loi de $2X - Y$.

Exercice 5.

1. Pour quelle valeur de la constante K la fonction :

$$f(x, y) \;=\; \begin{cases} K(1 + xy(x^2 - y^2)) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle la densité d'un couple de variables aléatoires (X, Y).

2. Déterminer les densités des lois de X et de Y ; identifier ces lois.
3. Calculer $Cov(X, Y)$.
4. Les variables X et Y sont elles indépendantes?
5. On pose $U = XY$ et $V = X$. Montrer que (U, V) admet une densité que l'on déterminera.