Feuille d'exercices 2

1 Autour de la formule de Bayes

1) Un examen comporte 15 questions, chacune admettant 3 réponses possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment; on suppose que les étudiants ayant préparé l'examen sont en proportion de 70% et répondent correctement à une question avec une probabilité de 0.8, les 30% d'étudiants restant choisissant les réponses au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

   a) Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité qu'il ait préparé l'examen?

   b) Soit M le nombre moyen de bonnes réponses pour un étudiant ayant préparé l'examen. Si un étudiant obtient cette note M, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas préparé l'examen?

2) Une mouche pond N œufs où N est distribué suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$). Chaque œuf éclot avec probabilité p ($p \in [0,1]$).

   a) À N donné, quelle est la loi de X, nombre d'œufs éclos? En déduire la loi marginale de X et sa fonction génératrice.

   b) Sachant que x œufs ont éclos, quelle est la loi de N?

2 Lois de Poisson

- Soient X et Y deux variables aléatoire indépendantes suivant respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$ et $\mathcal{P}(\beta)$, où α et β sont deux réels > 0, et soit $Z = X + Y$. Pour tout entier $n \geq 0$, déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X sachant que $Z = n$ (c'est-à-dire les probabilités conditionnelles $P(X = k \mid Z = n)$ pour $k \geq 0$).

- Un auto stoppeur attend au péage de l'autoroute A6 à Avallon. Le nombre de véhicules passant par ce péage durant une heure est une variable aléatoire X. Pour chacun de ces véhicules il y a une probabilité $p \in]0,1[$ qu'il vienne de la direction de Paris et donc $q = 1 - p$ qu'il vienne de la direction Lyon. On note Y et Z le nombre de véhicules venant de Paris (resp. Lyon), donc $Y + Z = X$.

   a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer les lois de Y et Z et montrer que Y et Z sont indépendantes.

   b) On suppose que Y et Z sont indépendantes. Quelle est la loi de X?

3 Loi multinomiale

a) Soit X une v.a. de loi concentrée sur $\{1, \ldots, k\}$;

$$P(X = j) = p_j, 1 \leq j \leq k.$$

Soit $Z^j = \mathbf{1}_{(X=j)}$ et $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}^k$. Calculer:

$$E\left[s_1^{Z^1} s_2^{Z^2} \cdots s_k^{Z^k}\right].$$

b) Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de la loi précédente (n variables indépendantes de même loi), et

$$N^j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(X_i=j)}.$$

Calculer:

$$E\left[s_1^{N^1} s_2^{N^2} \cdots s_k^{N^k}\right].$$

En déduire, pour $a_1, \ldots, a_k$ entiers de somme n:

$$P(N^1 = a_1, \ldots, N^k = a_k) = \frac{n!}{a_1! \ldots a_k!} p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}.$$

C'est la loi multinomiale de paramètre $(p_1, \ldots, p_k)$ et d'ordre n.

4 Décomposition dyadique sur $[0, 1]$

Soit l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$ où $\mathcal{B}([0,1])$ est la tribu borélienne de $[0,1]$ (la plus petite tribu contenant tous les ouverts de $[0,1]$) et P est la probabilité uniforme ($P([a,b]) = b - a$ pour tout intervalle $[a,b]$ de $[0,1]$). Sur cet espace on définit les variables aléatoires dyadiques, d_n ($n \geq 1$) : pour $\omega \in [0,1]$, $d_n(\omega)$ est le n-ième chiffre dans la décomposition binaire de ω. Pour les décompositions multiples, comme $1 = 1.0 = 0.1111...$ ou $1/2 = 0.1 = 0.0111..$, on choisit la décomposition infinie ($d_n(1) = 1$ pour tout n, $d_n(1/2) = 1$ pour tout $n \geq 2$).

1) Montrer que

$$P(\{\omega :\ d_j(\omega) = u_j\}) = \frac{1}{2} \text{ et } P(\{\omega :\ d_i(\omega) = u_i,\ i = 1, \ldots, n\}) = \frac{1}{2^n}$$

quelques soient $n, j \geq 1$ et $u_j, u_i \in \{0, 1\}$. En déduire que

$$P\left(\left\{\omega :\ \sum_{i=1}^{n} d_i(\omega) = k\right\}\right) = C_n^k \frac{1}{2^n}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

2) Soient, pour $n \geq 1$, les fonctions l_n définies sur $[0,1]$ par

$$l_n(\omega) = k \text{ si } d_n(\omega) = \cdots = d_{n+k-1}(\omega) \neq d_{n+k}(\omega) \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Montrer que

$$P(\{\omega :\ l_n(\omega) = k\}) = \frac{1}{2^k} \text{ et } P(\{\omega :\ l_n(\omega) \geq r\}) = \frac{1}{2^{r-1}} \quad (k, r \in \mathbb{N}^*).$$

$$P\left(\left\{\omega :\ \limsup_{n \to \infty} \frac{l_n(\omega)}{\log_2 n} \leq 1\right\}\right) = 1.$$

3) On dira que si $d_n = 1$ on obtient un succès à l'instant $n \geq 2$ et sinon un échec.

   a) Montrer que l'événement *"on obtient qu'un nombre fini de succés"* a une probabilité nulle.
   b) Pour $n \geq 1$, soit T_n l'instant du n-ième succès, c'est-à-dire la variable aléatoire entière égale au plus petit indice k tel qu'on ait n succès parmi $d_1, \ldots, d_k$. Déterminer la loi de T_n ($n \geq 1$).
   c) Montrer que les variables T_1 et $T_{n+1} - T_n$ pour $n \geq 1$ sont indépendantes et de même loi.

5) On dit qu'on obtient 01 à l'instant $n \geq 2$ si $d_{n-1} = 0$ et $d_n = 1$.

   a) Montrer que la probabilité de ne jamais obtenir 01 jusqu'à l'instant n compris est égale à $\dfrac{n+1}{2^n}$.
   b) En déduire que l'événement *"on obtient au moins une fois 01"* est de probabilité 1.
   c) Soit T la variable aléatoire entière égale au premier instant où l'on obtient 01. Déterminer la loi de probabilité de T.