Feuille d'exercices 1

1 Loi hypergéométrique

On interroge au hasard n individus différents dans une population de N individus dont N_1 fument et $N_2 = N - N_1$ ne fument pas. Soit X le nombre de fumeurs parmi les n interrogés.

a) Déterminer $P(X = k)$ $(0 \leq k \leq n)$; calculer l'espérance et la variance de X.

b) Que se passe t'il à la limite lorsque

  i) n est fixe, $N \to \infty$ et $\frac{N_1}{N} \to p$ $(0 < p < 1)$.

  ii) $n, N, N_1 \to \infty$ et $\frac{nN_1}{N} \to \lambda$ $(\lambda > 0)$.

2 Probabilité conditionnelle-Loi géométrique

0) Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon? Ma voisine a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité pour que l'ainé soit un garçon?

1) On admet que la probabilité qu'une famille ait n enfants est $p^{n-1}(1-p)$, $(n \geq 1,\ 0 \leq p \leq 1)$. On suppose que toutes les répartitions des sexes de n enfants sont équibrobables; montrer que la probabilité qu'une famille ait exactement K garçons est : $\dfrac{2p^{K-1}(1-p)}{(2-p)^{K+1}}$.

2) Un gardien de nuit a 10 clés, dont une seule marche, pour ouvrir une porte il emploie 2 méthodes :

   A : Méthode rationnelle; à jeûn, il retire les clés déjà essayées.

   B : Ivre, chaque clé peut être essayée plusieurs fois.

   Dans le cas B, montrer que la probabilité que le gardien n'ouvre jamais la porte est nulle. Soit X_A le nombre de clés essayées avant d'ouvrir, y compris la bonne, dans le cas A, X_B dans le cas B. Déterminer les lois de probabilité de X_A et X_B. Calculer les espérances de X_A et de X_B. On sait que le gardien est ivre un jour sur 3. Un jour, après avoir essayé 8 clés, le gardien n'a toujours pas ouvert la porte. Calculer la probabilité pour qu'il soit ivre.

3 Simulation

On sait tirer des nombres aléatoires uniformément répartis sur [0,1]. Comment obtenir des nombres aléatoires répartis suivant une loi de probabilité P donnée :

- si P est discrète,
- si P a une fonction de répartition continue strictement croissante.

F. (On pourra calculer la loi de $F(X)$ où X est une v.a. de loi P).

4 Ni discret Ni continu...

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2+1}{4} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{x+1}{x+2} & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $\mathbb{P}(\{0\})$, $\mathbb{P}(\{1\})$, et $\mathbb{P}(]1/2, 3/2[)$.

3) Décomposer $\mathbb{P}$ en la somme d'une mesure avec masses et d'une mesure à densité.

5 Continuité séquentielle

Soit (A_n) une suite d'ensembles mesurables sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que,

a) si la suite est croissante alors $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)$,

b) si la suite est décroissante alors $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)$.

6 Temps d'attente

Soit X une variable aléatoire représentant par exemple un temps d'attente exprimé en minutes. On suppose qu'elle suit une loi exponentielle dont la densité est

$$f(x) = C\exp(-\frac{x}{25})\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \quad (x \in \mathbb{R},\, C > 0).$$

1) Calculer la constante C ainsi que le temps moyen d'attente.

2) Calculer la probabilité des événements :

   A :"le temps d'attente est supérieur à 5 minutes"

   B :"le temps d'attente est compris entre 2 et 5 minutes"

   C :"le temps d'attente est de 5 minutes".

3) Soit la variable aléatoire $Y = X\mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R}:\, x<5\}}(X)$. Quelle est sa loi? Tracer la fonction de répartition correspondante.