IUFM de Toulouse
Préparation au CAPES de Maths
2000-2001

# Feuille d'exercices 4

## 1 Variables réelles

1) Soit $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la loi de $X^2$ par sa fonction de répartition. Calculer la densité de cette loi.

2) Des résistances sont fabriquées en série. La résistance d'un élément choisi au hasard dans la fabrication est une variable aléatoire $R$ de distribution uniforme entre 9 et 11 ohms. Déterminer la densité de probabilité de la conductance $C = 1/R$.

3) Soit $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quelle est la loi de $\tan X$?

4) Soit $X$ une v.a. réelle équirépartie sur $[0,1]$. Elle détermine deux intervalles $[0,X]$ et $[X,1]$.

   i) Quelle est la probabilité pour que le plus grand ait une longueur supérieur à $\frac{3}{4}$?

   ii) Déterminer les lois de $Y = \max\{X, 1-X\}$ et de $Z = \min\{X, 1-X\}$. Montrer qu'elles admettent des densités et calculer ces densités.

5) Soient $X$ une variable aléatoire réelle et $F$ sa fonction de répartition.

   i) Exprimer en fonction de $F$ les fonctions de répartition de
      * $aX + b$ (où $a$ et $b$ désignent des constantes réelles),
      * $X^n$,
      * $[X]$ (partie entière de $X$),
      * $X - [X]$,
      * $\exp(X)$.

   ii) On suppose que $X$ admet une densité $f$. Déterminer lesquelles des v.a. ci-dessus admettent une densité et exprimer ces densités en fonction de $f$ et $F$.

6) Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant la loi de Cauchy, de densité $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Déterminer la loi de la v.a. $Y = 1/X$ (calculer sa densité si elle en admet une).

7) Soit $X$ une variable de loi normale centrée réduite, c'est-à-dire de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

   Calculer les densité de probabilité des variables $Y = aX + b$ et $Z = \exp(X)$.

8) La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ est la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$$

i) Calculer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

ii) $X$ une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, déterminer les fonctions de répartition et les densités des v.a. $X^2$, $\exp(X)$, $\exp(-X)$ et $1/X$.

iii) Soit $T$ une variable aléatoire positive telle que $P[T > t] > 0$ pour tout $t \geq 0$ et

$$P[T > s + t \mid T > t] = P[T > s] \quad \text{pour tous } s, t \geq 0.$$

Interpréter cette propriété et montrer que $T$ suit une loi exponentielle.

9) Soient $X$ une variable aléatoire équirépartie sur $]0,1[$ et $f$ une fonction réelle continue et strictement croissante sur cet intervalle.

i) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = f(X)$ (on notera $a$ et $b$ les limites, éventuellement infinies, de $f$ en 0 et en 1).

ii) Comment choisir la fonction $f$ pour que $Y = f(X)$ soit une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

10) Soit $X$ une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F$ continue. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$?

11) Soit $X$ une v.a. réelle. Montrer qu'il existe un nombre $m$ (appelé une *médiane* de $X$) tel que :

$$P[X < m] \leq \frac{1}{2} \leq P[X \leq m].$$

Quand ce nombre est-il unique?

12) Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[0,1]$.

i) Calculer la probabilité de l'événement $[Y \leq X^2]$.

ii) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X - Y$.

## 2 Changements de variable

a) Soit $X$ une v.a. uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Quelle est la loi de $\tan X$?

b) Soit $X$ une v.a. de densité $f(x) = \dfrac{\mathbb{1}_{[0,1]}(x)}{\log 2(1+x)}$ montrer que $\dfrac{1}{X} - \left[\dfrac{1}{X}\right]$ a même loi que $X$.

## 3 Espérance et variance de lois classiques

Déterminer l'espérance et la variance, d'une loi normale, gamma, log normale.

# 4 Couples de variables

a) Soit $X$ et $Y$ des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi du couple $(X/Y, Y)$ puis celle de $Y$. $X/Y$ et $Y$ sont-elles indépendantes?

b) Soit $Y_1$ et $Y_2$ des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X_1 = \sqrt{-2\log Y_1}\cos 2\pi Y_2$ et $X_2 = \sqrt{-2\log Y_1}\sin 2\pi Y_2$. Montrer que $X_1, X_2$ sont i.i.d. et en déduire une méthode de simulation d'un couple de v.a. de loi normale indépendantes.

c) Soit $\Gamma$ une matrice $2\times 2$ symétrique définie positive, $\mu^T = (\mu_1, \mu_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $A$ une matrice $2\times 2$ avec $\Gamma = AA^T$. Soit $Z = (X,Y)^T$ un couple i.i.d. de loi normale standard. Quelle est la densité du vecteur $Z_1 = AZ + \mu$? Réciproquement, soit $Z_1^T = (X_1, Y_1)$ un couple de densité :

$$f(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Gamma}}\exp\left(-\frac{(z_1-\mu)^T\Gamma^{-1}(z_1-\mu)}{2}\right).$$

et soit $O$ une isométrie de $\mathbb{R}^2$ assimilée à sa matrice. Déterminer la loi du couple $Z_1' = O(Z_1 - \mu)$. A quelle conditions les composantes de $Z_1'$ sont-elles indépendantes? On suppose $\mu = 0$ et $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 1$, calculer $P(X_1 \geq 0, Y_1 \geq 0)$.

d) Soit $X, Y, Z$ des variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $X' = \frac{X+Z}{\sqrt{2}}$ $Y' = \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$. En utilisant la question précédente montrer que $P(X' \geq 0, Y' \geq 0) = \frac{1}{3}$.

e) Montrer que

$$f(x) = \frac{1}{\pi \operatorname{ch} x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi de densité $f$. Calculer la densité de $X+Y$; pour cela il sera utile d'établir

$$\frac{1}{\operatorname{ch}y\operatorname{ch}(x-y)} = \frac{2e^{2y}}{\operatorname{sh}x}\left(\frac{1}{1+e^{2y}} - \frac{1}{e^{2y}+e^{2x}}\right) \qquad \text{pour } x \neq 0.$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh}x}dx$. Vérifier que $\displaystyle\frac{x}{\operatorname{sh}x} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} x\exp(-(2k+1)x)$ pour $x > 0$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

f) Soit $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires de densité de probabilité :

$$g(x,y) = \begin{cases} = \frac{1}{2}x\ y \ \text{ si } (x,y) \in D \\ \\ = 0 \text{ si } (x,y) \notin D \end{cases}$$

où $D$ est le premier quart du disque centré en 0 de rayon 2. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes? Déterminer la densité de probabilité de la variable $Z = X^2 + Y^2$, puis celle de $R = \sqrt{X^2+Y^2}$.

## 5 Estimation d'un paramètre de support

Soit $(X_n)$ une suite i.i.d. de v.a uniforme sur $[0, \theta]$ $(\theta > 0)$ et $M_k = \sup_{1 \leq n \leq k} X_n$.

1) Calculer la densité de $M_k$.

2) Calculer l'espérance et la variance de $M_k$.

3) On se propose d'estimer le paramètre $\theta$. Que pensez-vous de $M_k$ comme estimateur, est-il sans biais? Proposer un estimateur sans biais $\widehat{\theta}_k$ construit à partir de $M_k$. Montrer que cet estimateur converge en probabilité vers $\theta$ et le comparer a l'estimateur sans biais construit à partir de la moyenne empirique des observations.

4) Montrer que $k(1 - \frac{M_k}{\theta})$ converge en loi.

## 6 Loi et espérance conditionnelle

1) Calculer la fonction caractéristique du couple $Z_1$ de 3.c). Soient $X, Y$ deux v.a. telles que le couple $(X, Y)$ a une densité. On suppose que $X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et que $E[\exp(itY)|X] = \exp(itX - \frac{\sigma^2 t^2}{2})$ p.s. Quelle est la loi du couple $(X, Y)$? Calculer $E(X|Y)$.

2) Soit $X, Y$ des variables uniformes sur $[0, 1]$. Montrer que, pour $\alpha \in ]-1, 1[$, les lois de fonction de répartition

$$H_\alpha(x, y) = xy[1 + \alpha(1 - x)(1 - y)]$$

sont compatibles avec ces lois marginales et en déduire que les lois marginales ne sont, en général, pas suffisante à caractériser la loi d'un couple.

3) Soit $X$ une v.a. de loi exponentielle. Donner la loi de $X$ conditionnelle à $\inf(X, a)$ $(a > 0)$.