IUFM de Toulouse
Préparation au CAPES de Maths
2000-2001

Feuille d'exercices 1

1 Evénements, probabilités élémentaires

1) Soient A, B, et C trois événements d'un espace de probabilité. Exprimer les événements suivants à l'aide des opérations élémentaires sur les événements :

   - "A est réalisé seul";
   - "A et B sont réalisés mais pas C";
   - "un des trois événements est réalisé";
   - "deux événements au plus sont réalisés";
   - "aucun de ces événements n'est réalisé";
   - "au moins deux événements sur ces trois sont réalisés";
   - "deux événements exactement sur ces trois sont réalisés".

   Exprimer leurs indicatrices en fonction de celles de A, B, et C.

2) Soit Ω un ensemble. On note par $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice d'un sous-ensemble A de Ω.

   i) Vérifier les égalités suivantes

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\cap B} &= \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \\ \mathbb{1}_{A\cup B} &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \\ \mathbb{1}_{A\setminus B} &= |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|.\end{aligned}$$

   ii) En utilisant ces égalités démontrer que

   * l'opération $(A, B) \longrightarrow A \setminus B$ sur les parties de Ω est associative;
   * si A, B, C sont trois parties de Ω, alors on a

$$A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C).$$

3) Soient A et B deux événements d'un espace de probabilité. Discuter en fonction de $p = P(A)$ et $q = P(B)$ les valeurs possibles de $P(A \cap B)$.

4) Soient A, B et C trois événements d'un espace de probabilité. On suppose que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ et $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = 1/3$.

   Quelles sont les valeurs possibles pour $P(A \cap B \cap C)$?

5) Soient A, B, C et D des événements d'un espace de probabilité.

i) On suppose que, si A et B sont réalisés, C est aussi réalisé. Montrer que

$$P(A) + P(B) \leq 1 + P(C).$$

ii) On suppose que, si A, B et C sont réalisés, D est aussi réalisé. Montrer que

$$P(A) + P(B) + P(C) \leq 2 + P(D).$$

6) Montrer, en donnant un contre-exemple que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des algèbres de Boole, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'est pas en général une algèbre de Boole.

7) Décrire l'algèbre et la σ-algèbre des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ engendrée par tous les singletons (les sous-ensembles contenant un seul point).

8) Qu'est–ce qui est plus probable: obtenir au moins un 6 avec quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins deux 6 avec vingt lancers d'un dé?

9) On admet que la probabilité d'apparition d'une mutation sur un individu est de 10^{-6}. Combien d'individus faut-il s'attendre à examiner pour observer au moins un mutant avec la probabilité $0,995$?

10) Dans une urne on a n_1 boules blanches, n_2 boules noires et n_3 boules rouges. On tire avec remises un échantillon de k boules. Quelle est la probabilité d'obtenir un échantillon contenant k_1 boules blanches, k_2 boules noires et k_3 boules rouges ? *(Loi multinomiale.)*

11) Dans un supermarché il y a 150 cartons de lait dont 5 sont avariés et répartis au hasard parmi les 150. Chaque client est supposé acheter un carton seulement. Est-il préférable d'être le premier, le deuxième, ou le 150-ième client si l'on veut éviter le lait avarié?

12) On suppose que sur n exemplaires d'un produit, il y en a m de défectueux. On tire au hasard, sans remise, un échantillon de k parmi ces n. Déterminer la loi de la variable X égale au nombre d'exemplaires défectueux dans cet échantillon *(loi hypergéométrique)*.

13) Une loterie a lieu toutes les semaines. Chaque semaine on vend n billets et il y en a m de gagnants.

    i) Supposons qu'on achète 10 billets la même semaine. Quelle est la probabilité pour que l'un au moins de ces 10 billets soit gagnant?

    ii) Supposons maintenant qu'on achète un billet par semaine pendant 10 semaines. Quelle est la probabilité pour que l'on gagne au moins une fois?

    Quelle est d'après vous la meilleure stratégie?

2 Combinatoire élémentaire

1) Quelle est la probabilité pour que n personnes prises au hasard aient des jours anniversaires différents? (en oubliant les années bissextiles). Trouver n tel que cette probabilité soit inférieure à $0,5$.

2) n livres sont placés au hasard sur une étagère; quelle est la probabilité pour que K livres donnés soit l'un à coté de l'autre?

3) Soit N jetons numérotés de 1 à N

   a) On tire un échantillon, sans remise, de taille $2n+1 \leq N$. Soit X le numéro du jeton tel que dans l'échantillon il y ait n jetons de numéro $< X$ et n jetons de numéro $> X$. Calculer $P(X=k)$ et $E(X)$.

   b) On tire un échantillon, sans remise, de taille n. Soit Y le plus grand numéro des jetons de l'échantillon. Calculer $P(Y=k)$.

   c) On tire un jeton, avec remise, jusqu'à ce qu'on retrouve un jeton déjà tiré. Soit Z le nombre de tirages nécessaire. Calculer $P(Z=k)$.

3 Loi hypergéométrique

On interroge au hasard n individus différents dans une population de N individus dont N_1 fument et $N_2 = N - N_1$ ne fument pas. Soit X le nombre de fumeurs parmi les n interrogés.

a) Déterminer $P(X=k)$ $(0 \leq k \leq n)$; calculer l'espérance et la variance de X.

b) Que se passe t'il à la limite lorsque

   i) n est fixe, $N \to \infty$ et $\frac{N_1}{N} \to p$ $(0 < p < 1)$.

   ii) $n, N, N_1 \to \infty$ et $\frac{nN_1}{N} \to \lambda$ $(\lambda > 0)$.

4 Probabilité conditionnelle-Loi géométrique

0) Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon? Ma voisine a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité pour que l'ainé soit un garçon?

1) On admet que la probabilité qu'une famille ait n enfants est $p^{n-1}(1-p)$, $(n \geq 1,\ 0 \leq p \leq 1)$. On suppose que toutes les répartitions des sexes de n enfants sont équibrobables; montrer que la probabilité qu'une famille ait exactement K garçons est : $\dfrac{2p^{K-1}(1-p)}{(2-p)^{K+1}}$.

2) Un gardien de nuit a 10 clés, dont une seule marche, pour ouvrir une porte il emploie 2 méthodes :

A : Méthode rationnelle; à jeûn, il retire les clés déjà essayées.

B : Ivre, chaque clé peut être essayée plusieurs fois.

Dans le cas B, montrer que la probabilité que le gardien n'ouvre jamais la porte est nulle. Soit X_A le nombre de clés essayées avant d'ouvrir, y compris la bonne, dans le cas A, X_B dans le cas B. Déterminer les lois de probabilité de X_A et X_B. Calculer les espérances de X_A et de X_B. On sait que le gardien est ivre un jour sur 3. Un jour, après avoir essayé 8 clés, le gardien n'a toujours pas ouvert la porte. Calculer la probabilité pour qu'il soit ivre.

5 Statistiques de Maxwell-Boltzmam, Bose-Einsten et Fermi-Dirac

1) Soient r objets indistinguables à répartir dans n cases ($r \geq n$). Donner le nombre K_n^r de répartitions distinctes et le nombre de répartitions où chaque case contient au moins un objet.

2) En déduire le nombre de solutions (dans $\mathbb{N}^k$) à l'équation $n_1 + \cdots + n_k = r$.

3) En physique, on considère r particules qui peuvent chacune occuper l'une des n régions de l'espace des états de phase. Trois modèles sont considérés :

   a) le modèle de *Maxwell-Boltzman* suppose que toutes les répartitions de ces r particules sont possibles et forment les évènements élémentaires du modèle;

   b) le modèle de *Bose-Einstein* ne considère que les répartitions distinguables comme événements élémentaires;

   c) celui de *Fermi-Dirac* interdit de plus la présence de deux particules dans une même région.

   Si $n = 5$ et $r = 3$, calculer la probabilité d'une répartition des trois particules dans trois régions données pour les trois modèles. De même, si $n = r = 3$, donner les probabilités des différentes répartitions pour les modèles de *Maxwell-Boltzman* et *Bose-Einstein.*

6 Le problème du chevalier de Monmort (1708)

Soient N enveloppes associées à N lettres. On apparie au hasard lettres et enveloppes. Soit ρ_0 la probabilité qu'aucune lettre ne soit adressée au bon destinataire.

1) Soient $B_1, \ldots, B_n$ des événements. Etablir la formule du crible de Poincaré :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = p_1 - p_2 + p_3 + \cdots + (-1)^{n-1} p_n,$$

où $p_j = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} P\left(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \cdots \cap B_{i_j}\right)$.

2) On note A_k l'événement : "l'appariement est correct pour la k-ème enveloppe". Montrer que $P(A_k) = 1/N$ et donner $P(A_{i_1} \cap \dots A_{i_k})$.

3) Calculer la valeur de ρ_0 en utilisant la formule de Poincaré et montrer, que pour n grand, $\rho_0 \sim e^{-1}$.

4) Reprenant le contexte de l'exercice 5, montrer que la probabilité que k régions données parmi n soient vides si r objets distinguables sont à répartir parmi ces n régions est

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^r .$$

5) Utilisant à nouveau la formule de Poincaré, montrer que la probabilité que toutes les régions soient occupées est

$$\delta_0 = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu C_n^\nu \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^r .$$

6) Reprendre le même raisonnement pour montrer que la probabilité que exactement m régions soient vides est

$$\delta_m = C_n^m \sum_{\nu=0}^{n-m} (-1)^\nu C_{n-m}^\nu \left(1 - \frac{\nu + m}{n}\right)^r .$$

On peut montrer que si le rapport $\lambda = ne^{-r/n}$ reste constant et n tend vers $+\infty$ alors δ_m peut-être approché par $e^{-\lambda}\lambda^m/m!$. (Il s'agit de la loi de Poisson)

7) Appliquer au problème de l'anniversaire pour un village de 1900 habitants en déterminant la probabilité approchée qu'il y ait dix jours de l'année sans anniversaire.

7 Introduction aux marches aléatoires

1) Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on considère une promenade aléatoire où les déplacements possibles sont, pour $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. de (i, j) vers $(i + 1, j + 1)$ ou $(i + 1, j - 1)$.

   a) Donner une condition nécessaire est suffisante sur m, μ, n, ν pour qu'il existe une trajectoire $T_{M,N}$ reliant $M(m, \mu)$ à $N(n, \nu)$. Donner le nombre de trajectoires $T_{M,N}$.

   b) **Principe de réflexion**
   Soit $\mu > 0$, $\nu > 0$ et M' le symétrique de M par rapport à l'axe des temps. Montrer qu'il existe autant de trajectoires touchant l'axe des temps et menant de M à N, que de trajectoires menant de M' à N. En déduire, lorsque, partant de M, on arrive en N la probabilité de ne jamais rencontrer l'axe des temps.

   c) Au cours d'un scrutin opposant deux candidats, C a obtenu 600 voix et D 400. Quelle est la probabilité que C ait été majoritaire tout au long du scrutin?

2) On étudie ici maintenant une *marche aléatoire* schématisée par une séquence de *pile ou face* où on représente un *pile* par un accroissement de 1 dans le gain S_n et un *face* par une diminution de 1 de S_n (avec la condition initiale $S_0 = 0$). On représente la succession des gains et pertes par un graphe reliant les points (n, S_n).

Retours en zéro

a) Pour $n > 0$ et $r \in \mathbb{Z}$, donner la probabilité $P(S_n = r)$. En déduire la probabilité d'un retour à l'origine $\mu_{2t} = P(S_{2t} = 0)$ et montrer que μ_{2t} peut s'approcher par $1/\sqrt{\pi t}$, (on rappelle la formule de Stirling : pour n grand $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.)

b) On considère l'événement : "le premier retour à l'origine se produit en $2v$" ($v \geq 1$), de probabilité f_{2v}. Montrer que

$$\mu_{2t} = f_2\mu_{2t-2} + \cdots + f_{2t}\mu_0.$$

c) Montrer que la probabilité qu'aucun retour à l'origine ne se soit produit jusqu'à l'étape $2n$ (incluse) est égale à μ_{2n}. En déduire que $f_{2n} = \mu_{2n-2} - \mu_{2n}$.

d) On considère un jeu de $2n$ coups. On appelle T le temps de dernier retour en 0 et on pose, pour $1 \leq k \leq n$, $\alpha_{n,k} = P(T = 2k)$. Montrer, en utilisant les questions précédentes que $\alpha_{n,k} = \mu_{2k}\mu_{2n-2k}$.

e) Utiliser l'approximation de a) pour approcher $\alpha_{10,k}$ ($k = 1, \ldots, 10$). Pour n assez grand, en déduire que la probabilité que, jusqu'au temps $2n$ compris, le dernier retour ait lieu avant le temps t, est approximativement (pour n grand) :

$$\frac{2}{\pi}\text{Arcsin}\sqrt{\frac{t}{2n}}.$$