Image

Travaux pratiques
Feuille 3 :
Zoom d'images par minimisation de la variation totale

Dans ce TP, nous allons considérer une méthode d'optimisation pour zoomer des images. Nous considérerons un modèle d'échantillonnage simple. Étant donnée une image de départ u, de taille $KN \times KN$, l'image sous-échantillonnée, dans un rapport K, v est définie par

$$v_{i,j} = \frac{1}{K^2} \sum_{k,l=0}^{K-1} u_{Ki+k,Kj+l},$$

pour $(i,j) \in \{0, \ldots, N-1\}^2$. On note l'opérateur d'échantillonnage ainsi défini Q. On a donc $v = Q(u)$.

On notera

$$\mathcal{C} = \{w \in I\!R^{(KN)^2}, Q(w) = v\}.$$

On sait donc que $u \in \mathcal{C}$, c'est la seule information dont nous sommes sûr concernant u.

Pour définir une méthode d'optimisation permettant de zoomer une image u, il est donc naturel de considérer le problème :

$$(P) : \begin{cases} \text{minimiser } E(w) \\ \text{sous la contrainte } w \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

pour une énergie E bien choisie.

Nous considérerons dans cet exercice la minimisation d'une approximation différentiable de la variation totale. Pour cela, nous définissons

$$\nabla w_{i,j} = \begin{pmatrix} (D_x w)_{i,j} \\ (D_y w)_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{i+1,j} - w_{i,j} \\ w_{i,j+1} - w_{i,j} \end{pmatrix}$$

pour $(i,j) \in \{0, \ldots, KN-1\}^2$ (on supposera que w est périodisée en dehors de son support).

Par ailleurs, nous approximerons le module du gradient, dans la variation totale, par

$$\varphi_\beta(|\nabla w_{i,j}|^2),$$

avec

$$\varphi_\beta(t) = \sqrt{t+\beta},$$

pour $\beta > 0$. En pratique, on prendra $\beta = 0.01$. L'approximation de la variation totale est alors définie par

$$E_\beta(w) = \sum_{i,j=0}^{KN-1} \varphi_\beta\left(|\nabla w_{i,j}|^2\right).$$

Exercice 1.

(1) Vérifier que $\mathcal{C}$ est un espace affine. Décrire l'espace vectoriel $\mathcal{C}'$ définissant sa direction.

(2) Vérifier que l'opérateur qui à $w \in I\!R^{(KN)^2}$ associe $P_\mathcal{C}(w) \in I\!R^{(KN)^2}$, définie par

$$P_\mathcal{C}(w)_{i,j} = w_{i,j} - Q(w)_{[\frac{i}{K}],[\frac{j}{K}]} + v_{[\frac{i}{K}],[\frac{j}{K}]},$$

où $[t]$ représente la partie entière de t, est la projection orthogonale sur $\mathcal{C}$.

(3) Vérifier que tous les éléments de $\mathcal{C}$ ont la même moyenne, et en déduire que (P) a une solution. Proposer un exemple pour lequel (P) a plusieurs solutions.

(4) Vérifier que

$$\nabla E(w) = 2\left(D_x^*(X) + D_y^*(Y)\right),$$

où D_x^* et D_y^* sont les même que dans le TP1, et

$$X_{i,j} = \varphi'_\beta(|\nabla w_{i,j}|^2) D_x w_{i,j},$$

$$Y_{i,j} = \varphi'_\beta(|\nabla w_{i,j}|^2) D_y w_{i,j},$$

pour $(i,j) \in \{0, \dots, KN-1\}^2$, et où $\varphi'_\beta(t)$ est la dérivée de φ_β au point t.

(5) Détailler l'algorithme du gradient projeté pour résoudre (P).

(6) —

— Rendez vous sur
http ://www.math.univ-toulouse.fr/∼fmalgouy/index.html
puis naviguez pour atteindre la page web du cours.

— Télécharger et décompresser l'archive *tp3.zip*.

L'archive tp3.zip contient une image "barbara.gif", et des fichiers Matlab.

(7) Lire le programme *echantillonne.m* et le programme *zoom_ TV.m*. Dire (dans le détail) ce qu'ils font.

(8) Lancer le script et commenter les résultats obtenus.

(9) Modifier le module *zoom_ TV* pour pouvoir utiliser un pas constant.

(10) Faire tourner le module *zoom_ TV* pour plusieurs valeurs du pas constant et pour le pas de Armijo. Concluez sur le choix du nombre d'itérations et du pas.

Exercice 2.

(1) Écrire un programme suivant l'algorithme du gradient à pas constant et le pas de Armijo, pour minimiser une fonctionnelle permettant de résoudre (P) par pénalisation. Pour cela, vous considérerez la fonctionnelle :

$$F(w) = E(w) + \lambda \sum_{i,j=0}^{N-1} (Q(w)_{i,j} - v_{i,j})^2,$$

pour une grande valeur de λ.

(2) Adapter le programme pour choisir le pas conduisant à la plus grande descente, vu en cours.

(3) Comparer les vitesses de convergence pour les différentes stratégies de choix de pas à votre disposition.