Interro n°1 – 11 mars 2010 (durée 2h)

Tous documents interdits. Soyez concis, mais justifiez scrupuleusement ce que vous faites.

Question de cours. Énoncer le théorème de cours reliant la fonction génératrice de $X_1 + \cdots + X_n$, où $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires à valeurs entières indépendantes, à celles des v.a. $X_1, \ldots, X_n$. A-t-on une réciproque à ce théorème ?
Application : Si les v.a. X_i ont même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.

Exercice 1. Un laboratoire pharmaceutique veut introduire, sur le marché lucratif des tests, un test de dépistage d'une certaine maladie M. Une étude statistique nous informe que cette maladie est présente dans 0,1% de la population. Après expérimentation, le laboratoire a constaté que le test répond positivement chez 99% des personnes atteintes réellement de la maladie M, et chez 0,2% des personnes saines. Vous décidez de pratiquer ce test.

1) Quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?
2) Le test revient positif. Quelle est la probabilité que vous soyez réellement malade ? *(Donner une estimation numérique simple...)*

Exercice 2. Une urne contient N boules, dont r rouges et $N - r$ vertes ($N \geq 1$ et $1 \leq r \leq N$). On tire *successivement et sans remise* n boules de l'urne ($1 \leq n \leq N$). Pour $i = 1, \ldots, n$, on pose X_i la v.a. égale à 1 si la i^{e} boule tirée est rouge, et 0 sinon.

1) Donner un espace de probabilité associé à cette expérience.
2) Calculer la loi de X_i, pour tout $i = 1, \ldots, n$. Les v.a. $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont-elles indépendantes ?
3) On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer la loi de S_n, ainsi que son espérance.
4) Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. En déduire $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)$.

Exercice 3. Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}},$$

où b est un paramètre strictement positif.

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une certaine loi de probabilité dont on déterminera la densité si elle existe.
2) Soit X une v.a. de fonction de répartition F, et $Y = e^{-bX}$. Calculer la fonction de répartition de Y, ainsi que sa loi.

Problème. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi

$$\mathbb{P}(X_1 = +1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, avec $S_0 = 0$. On s'intéresse aux retours en zéro de la marche aléatoire $(S_n)_{n \geq 0}$.

1) Calculer la loi de la v.a. $Y_n = (n + S_n)/2$.
2) En déduire $\mathbb{P}(S_{2n} = 2l)$, pour $l \in \{-n, \ldots, n\}$.

3) Montrer que pour $0 \leq l \leq n$, on a
$$\frac{\mathbb{P}(S_{2n} = 2l)}{\mathbb{P}(S_{2n} = 0)} \leq 1.$$
Montrer la même inégalité pour $-n \leq l \leq 0$.

4) En déduire l'inégalité
$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \geq \frac{1}{2n+1}.$$

5) Que vaut $\mathbb{P}(S_n = 0)$ pour n impair ?

6) On considère la v.a. $N = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n = 0\}}$ égale au nombre de retours en zéro de $(S_n)_{n \geq 1}$. Calculer $\mathbb{E}(N)$. Peut-on conclure quant à la finitude de N ?

7) On définit les temps de retours en zéro de la marche par $T_0 = 0$, et pour $m \geq 1$,
$$T_m = \begin{cases} \inf\{k > T_{m-1} | S_k = 0\}, & \text{sur } \{T_{m-1} < +\infty\}, \\ +\infty, & \text{sur } \{T_{m-1} = +\infty\}. \end{cases}$$
On remarque alors que p.s. $\{N \geq m\} = \{T_m < +\infty\}$.

   a) Montrer que
   $$\{N \geq m+1\} = \bigcup_{j \geq 1} \{T_m = j\} \cap \{\exists k > j, S_k - S_j = 0\},$$
   puis que,
   $$\mathbb{P}(N \geq m+1) = \mathbb{P}(N \geq m)\mathbb{P}(N \geq 1).$$

   b) En déduire que $\mathbb{P}(N \geq m) = \mathbb{P}(N \geq 1)^m$, pour tout $m \geq 1$.

8) Établir que pour une v.a. X à valeurs entières, on a $E(X) = \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}(X \geq m)$.

9) En déduire que $\mathbb{P}(N \geq 1) = 1$, puis que $N = +\infty$ p.s.