Corrigé de l'interro n°2 du 17 mai 2010

Question de cours. Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\varphi_X(x) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle x, K_X x\rangle}\right) = e^{-(ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+2dx_1x_2+2ex_1x_3+2fx_2x_3)/2}.$$

Exercice 1. 1) On a $U = TX$, avec

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc U est gaussien, car image par une application linéaire de matrice T du vecteur gaussien X. Sa matrice de covariance est alors

$$K_U = TK_X{}^tT = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Or $\det(U) = 20$, donc U est inversible, d'inverse

$$U^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix},$$

et U admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, donnée par

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{20}}e^{-(3x_1^2+7x_2^2-2x_1x_2)/40}.$$

2) $Y = AX$ est gaussien, de matrice de covariance $K_Y = AK_X{}^tA$. Les composantes de Y sont indépendantes si et seulement si K_Y est diagonale. Il s'agit donc de trouver A telle que $AK_X{}^tA$ soit diagonale, *i.e.* de diagonaliser K_X dans une base orthogonale, ce qui est toujours possible car K_X est symétrique. Le polynôme caractéristique de K_Y est

$$\det(K_X - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-1)^2.$$

Les valeurs propres de K_Y sont donc $\lambda_1 = 1$ (double), et $\lambda_2 = 5$ (simple). Cherchons les vecteurs propres associés. Pour $\lambda_1 = 1$, le vecteur (x, y, z) est vecteur propre s'il est solution du système

$$\begin{cases} x = x \\ 2y - 2z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z.$$

L'espace propre associé à λ_1 est alors engendré par les vecteurs normés orthogonaux

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_2 = 5$, en raisonnant de même, on trouve que l'espace propre associé est engendré par le vecteur

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

orthogonal aux deux précédents. La matrice de passage est alors donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

et on a $K_X = PD^tP$, où D est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc de choisir $A = {}^tP$.

3) Si $X = BN$, on a alors $K_X = B^tB$. D'après la question précédente, on a

$$K_X = PD^tP = P\sqrt{D}\sqrt{D}^tP = (P\sqrt{D})^t(P\sqrt{D}),$$

où $\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$. Il suffit donc de choisir

$$B = P\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{5}/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{5}/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. 1) Soit f borélienne positive. Par indépendance des v.a. X_i, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(S_1,\dots,S_n)) &= \int_{]0,+\infty[^n} f(x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+\dots+x_n)\lambda^n e^{-\lambda(x_1+\dots+x_n)} dx_1\cdots dx_n \\ &= \int f(s_1, s_2, \dots, s_n)\lambda^n e^{-\lambda s_n}\mathbb{1}_{\mathcal{S}} ds_1\cdots ds_n,\end{aligned}$$

par le changement de variables $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+\dots+x_n)$ de $]0,+\infty[^n$ dans $\mathcal{S} = \{0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n\}$, et de jacobien égal à 1.

2) On montre aisément par récurrence que

$$\int \mathbb{1}_{\{0<s_1<s_2<\dots<s_{n-1}<s\}} ds_1\cdots ds_{n-1} = \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Par la formule des marginales, on obtient la loi de S_n en intégrant la densité de $(S_1,\dots,S_n)$ par rapport aux $n-1$ premières variables. La densité ρ_{S_n} de S_n est alors

$$\rho_{S_n}(s) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(s)\int \lambda^n e^{-\lambda s}\mathbb{1}_{\{0<s_1<s_2<\dots<s_{n-1}<s\}} ds_1\cdots ds_{n-1} = \lambda^n\frac{s^{n-1}e^{-\lambda s}}{(n-1)!}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(s).$$

Donc S_n suit une loi gamma de paramètres n et λ.

3) Les v.a. X_i sont i.i.d., et dans L^1, donc par la loi des grands nombres, $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\lambda}$, quand $n \to \infty$.

4) Soit $a > 0$. On a pour tout $s \in]a,+\infty[$, $t^k e^{-st} \le t^k e^{-at} \in \mathcal{L}^1(]0,+\infty[)$. Donc, par application successive du théorème de dérivation sous le signe intégrale, on montre que $\mathcal{L}f$ est C^∞ sur $]a,+\infty[$, pour tout $a > 0$, et donc C^∞ sur $]0,+\infty[$. Sa dérivée k-ième est alors

$$(\mathcal{L}f)^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} (-1)^k t^k e^{-st} f(t)dt.$$

5) On prend $\lambda = 1/x$, pour $x > 0$. Alors, comme S_n/n converge vers x p.s., on a par convergence dominée que pour toute f borélienne bornée,

$$\mathbb{E}(f(\frac{S_n}{n})) \to f(x),$$

quand $n \to \infty$. Or,

$$\mathbb{E}(f(\frac{S_n}{n})) = \int_0^{+\infty} f(\frac{s}{n}) \frac{s^{n-1}e^{-s/x}}{x^n(n-1)!} ds = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{n^n t^{n-1} e^{-nt/x}}{x^n(n-1)!} dt = \frac{n^n(-1)^{n-1}}{x^n(n-1)!} (\mathcal{L}f)^{(n-1)}(\frac{n}{x}).$$

On obtient bien la formule d'inversion demandée.

Exercice 3. *Question préliminaire :* Comme $|X - \inf(X,a)| = (X-a)\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}$, et que $X - a \leq X$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient que

$$\mathbb{E}(|X - \inf(X,a)| = \mathbb{E}((X-a)\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}) \leq \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}) \leq (\mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X \geq a))^{1/2}.$$

1) S_n est la somme de n v.a. indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1. S_n suit donc une loi de Poisson de paramètre n, et on a

$$E(Y_n^2) = \frac{1}{n}\mathbb{E}((S_n - n)^2) = \frac{1}{n}\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = 1.$$

2) Pour tout $a > 0$, par l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{P}(Y_n^- \geq a) \leq \frac{1}{a^2}\mathbb{E}((Y_n^-)^2) \leq \frac{1}{a^2}\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{1}{a^2}.$$

3) Par le TCL, on a que Y_n converge en loi vers N. La fonction $x \mapsto x^-$ étant continue, on en déduit que Y_n^- converge en loi vers N^-.

4) a) Comme Y_n^- converge en loi vers N^-, et que $x \mapsto \inf(x,a)$ est continue et bornée (par a), on a

$$E\left(\inf(Y_n^-, a)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left(\inf(N^-, a)\right).$$

b) On a, par la question préliminaire, et car $\mathbb{E}((Y_n^-)^2) \leq 1$ et $\mathbb{E}((N^-)^2) \leq 1$,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(Y_n^-) - \mathbb{E}(N^-)| &\leq \mathbb{E}|Y_n^- - \inf(Y_n^-, a)| + |\mathbb{E}(\inf(Y_n^-, a) - \inf(N^-, a))| + \mathbb{E}|\inf(N^-, a) - N^-| \\ &\leq \mathbb{P}(Y_n^- \geq a)^{1/2} + |\mathbb{E}(\inf(Y_n^-, a) - \inf(N^-, a))| + \mathbb{P}(N^- \geq a)^{1/2}. \end{aligned}$$

Le terme du milieu tend vers 0 par la question a). De plus, par 3), $\mathbb{P}(Y_n^- \geq a) \leq \frac{1}{a^2}$, et de même $\mathbb{P}(N^- \geq a) \leq \frac{1}{a^2}$. On obtient donc que

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}(Y_n^-) - \mathbb{E}(N^-)| \leq \frac{2}{a}.$$

Comme a est arbitraire, on fait tendre a vers $+\infty$, et finalement on obtient

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}(Y_n^-) - \mathbb{E}(N^-)| = 0.$$

5) On a

$$\mathbb{E}(N^-) = \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n^-) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}((n - S_n)\mathbb{1}_{S_n \leq n}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} (n-k)\frac{n^k}{k!}e^{-n} = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^{j+1}}{j!} \right) \\ &= \frac{e^{-n} n^{n+1}}{\sqrt{n} n!} = \frac{\sqrt{n}\, n^n e^{-n}}{n!}. \end{aligned}$$

Donc par la question précédente, on obtient

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$