Université Paris 6 P. et M. Curie 2008–2009

LM390 - Probabilités

Interro n°2 – 7 avril 2009 (durée 2h)

Aucun document autorisé.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, et de même loi de densité donnée par

$$p(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

On pose $V = X + Y$, et $W = \dfrac{X}{X+Y}$.

1) Calculer la densité du couple (V, W).
2) Calculer les densités marginales de V et de W. Les variables V et W sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On définit les variables aléatoires R sur $\mathbb{R}_+$, et Φ sur $]0, 2\pi[$ par $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, et

$$\begin{cases} X = R\cos\Phi \\ Y = R\sin\Phi. \end{cases}$$

1) Calculer la densité du couple (R, Φ).
2) En déduire les densités marginales de R et de Φ. Les variables R et Φ sont-elles indépendantes ?
3) On pose $S = R^2$. Montrer que S suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.
4) Soient $S_1, \ldots, S_n$ des variables aléatoires indépendantes, et de même loi que S. Calculer la loi de $S_1 + \cdots + S_n$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles.

1) On suppose dans cette question que pour tout $n \geq 1$, $|X_n| < M$, où M est un réel positif. Montrer que X_n converge vers 0 dans L^1 si et seulement si X_n converge en probabilité vers 0.
2) On suppose dans cette question que les v.a. X_n sont indépendantes, et que la série $\sum_{n\geq 1} X_n$ converge presque sûrement.
   a) Montrer que X_n converge presque sûrement vers 0.
   b) Montrer alors que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < +\infty.$$

3) On suppose dans cette question que X_n suit la loi exponentielle de paramètre 1 (de densité $e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$).

a) Étudier selon les valeurs de α la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq \alpha \log n).$$

b) En déduire que presque sûrement on a,

$$\limsup_n \Big(\frac{X_n}{\log n}\Big) = 1.$$

Exercice 4. Soit $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ une suite de variables aléatoires entières, indépendantes suivants la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

On pose

$$Y_n = \Pi_{k=1}^n (1 + X_k), \quad Z_n = \Pi_{k=1}^n X_k.$$

1) Etudier la convergence presque sûre de $\frac{1}{n}\log Y_n$.
2) Calculer $\mathbb{P}(Z_n \neq 0)$.
3) Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0.
4) Etudier la convergence dans L^1 de Z_n.

Exercice 5 (Exercice bonus)**.** 1) Soit X une variable aléatoire réelle positive, montrer que

$$\mathbb{E}\{X\} \ = \ \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{X \geq t\}\, dt.$$

2) Soit $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ une suite de variables aléatoires réelles positives de même loi, telle que $\mathbb{E}\{X_1\} < \infty$. Montrer que :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k\right) \ \longrightarrow \ 0, \quad \text{quand} \ \ n \to \infty.$$