Université Paris 6 P. et M. Curie 2008–2009
LM390 - Probabilités

Interro n°1 – 2 mars 2009 (durée 2h)

Aucun document autorisé.

Exercice 1. On lance une infinité de fois une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile est p $(0 < p < 1)$. Soit, pour $i \geq 1$, X_i la variable aléatoire égale à 1 si on tombe sur pile au i$^{\text{e}}$ lancer, et 0 sinon. Soit T le premier temps d'atteinte de pile, i.e. $T = \inf\{n \geq 1 | X_n = 1\}$, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

1) Montrer que T est bien une variable aléatoire.
2) Calculer la loi de T.
3) Calculer la fonction génératrice de T, ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 2. Une urne contient N boules, dont r rouges et $N - r$ blanches. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne, $(1 \leq n \leq N)$. Pour $i = 1, \dots, n$, on pose X_i la v.a. égale à 1 si la i$^{\text{e}}$ boule tirée est rouge, et 0 sinon.

1) Donner un espace de probabilité associé à cette expérience.
2) Calculer la loi de X_i, pour tout $i = 1, \dots, n$. Les v.a. $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont-elles indépendantes ?
3) On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer la loi de S_n, ainsi que son espérance.
4) Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. En déduire $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, et de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. On définit la v.a. X par

$$X(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } N(\omega) = 0, \\ S_n(\omega), & \text{si } N(\omega) = n, \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$

1) Calculer la loi conditionnelle de X sachant l'événement $\{N = k\}$, pour tout $k \geq 0$.
2) Montrer que la fonction génératrice de X est donnée par $G_X = G_N \circ G_{X_1}$.
3) On suppose dans cette question que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, i.e. $\mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, pour $k \geq 0$.
   a) Calculer la loi de X.
   b) On pose $Y_i = 1 - X_i$, pour tout $i \geq 1$, et on définit Y par
   $$Y(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } N(\omega) = 0, \\ Y_1(\omega) + \cdots + Y_n(\omega), & \text{si } N(\omega) = n, \text{ pour } n \geq 1, \end{cases}$$
   de telle sorte que $N = X + Y$. Montrer que X et Y sont indépendantes.
4) N est de nouveau de loi quelconque, et on suppose désormais que X et Y sont indépendantes, et que $\mathbb{E}(N) = m < \infty$.

a) Montrer que $G_N(s) = G_N(\frac{1+s}{2})^2$, pour tout $s \in [0,1]$.

b) Monter en itérant la relation précédente que $G_N(s) = G_N(1 + \frac{s-1}{2^n})^{2^n}$, pour tout $n \geq 1$.

c) En effectuant, à $s \in [0,1]$ fixé, un développement limité quand $n \to \infty$ de la relation précédente, calculer G_N. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre m.

Exercice 4. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géometrique donnée par

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = (1-a)a^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 < a < 1.$$

On pose

$$M = \min(X, Y), \quad Z = Y - X.$$

1) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \geq k)$.
2) Calculer $\mathbb{P}(M \geq k)$, en déduire $\mathbb{P}(M = k)$. Quelle est la loi de M ?
3) Calculer pour $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(M = k,\ Z = r)$. On distinguera le cas où $r \geq 0$ et le cas où $r < 0$.
4) En déduire la loi de Z. Que peut-on dire des v.a. M et Z ?

Exercice 5. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ (la densité de U est donnée par $1_{[0,1]}$).

1) Calculer la fonction de répartition de U.
2) On pose $X = \log(\frac{1}{U})$. Calculer la fonction de répartition de X.
3) Montrer que X admet une densité, et calculer la loi de X.