Corrigé de l'interro n°3 du 6 mai 2009

Exercice 1. On appelle Q la matrice de covariance de X.

1) On a clairement que : $X_1 \sim \mathcal{N}(1,1),\ X_2 \sim \mathcal{N}(-2,2),\ X_3 \sim \mathcal{N}(3,3)$,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right),$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right),$$

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right).$$

2) Vu la matrice de covariance et d'après le cours, on a que X_1 et X_2 sont indépendants, X_2 et X_3 ne sont pas indépendants, et X_1 et X_3 sont également non indépendants.

3) X admet une densité si et seulement si, le determinant de Q est non nul. En utilisant les cofacteurs de la première ligne, on a :

$$\det Q = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Donc X n'admet pas de densité.

Exercice 2. 1) Toute combinaison linéaire des composantes $\begin{pmatrix} X_1 + 2X_2 - X_3 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 \end{pmatrix}$ est également une combinaison linéaire des composantes de X, donc $\begin{pmatrix} X_1 + 2X_2 - X_3 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien. En posant $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on remarque que $\begin{pmatrix} X_1 + 2X_2 - X_3 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 \end{pmatrix} = CX$. Il suit que

$$\begin{pmatrix} X_1 + 2X_2 - X_3 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, CQ{}^tC\right).$$

Après calcul, on trouve

$$\begin{pmatrix} X_1 + 2X_2 - X_3 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 19 \end{pmatrix}\right).$$

2) Commençons par chercher les valeurs propres de Q. Elles sont solutions de l'équation $\det(Q - \lambda I_3) = 0$, d'où

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4).$$

On trouve, $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 4$.

Cherchons les vecteurs propres associés en résolvant le systeme $Qv = \lambda v$, pour $v \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{cases} 3v_1 - v_2 & = & \lambda v_1 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 & = & \lambda v_2 \\ v_2 + 3v_3 & = & \lambda v_3. \end{cases}$$

Pour $\lambda_1 = 3$, on trouve $v_1 = v_3$ et $v_2 = 0$.
Pour $\lambda_2 = 1$, on trouve $v_1 = \frac{v_2}{2} = -v_3$
Pour $\lambda_3 = 4$, on trouve $v_1 = -v_2 = -v_3$.
Les vecteurs associés sont alors respectivement :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Soit

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

la matrice de passage permettant d'écrire Q sous forme diagonale. On a alors $P^tQP = D$, où

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors de poser

$$A = P^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}, \end{pmatrix}$$

3) On a ${}^tPQP = D$ d'où $Q = PDP^t = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^t = P\sqrt{D}P^tP\sqrt{D}P^t = \left(P\sqrt{D}P^t\right)^2$, où

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc de poser

$$B = P\sqrt{D}P^t = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}+5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{3\sqrt{3}-5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3\sqrt{3}-5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{3\sqrt{3}+5}{6} \end{pmatrix}$$

Exercice 3. 1) La fonction f est continue sur $[a, b]$, donc par le théorème de Heine elle est uniformément continue sur $[a, b]$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

La fonction f est bornée, soit alors M tel que $|f(y)| \leq M$ pour tout y. On a

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}\big(f(Y_{n,x})\big) - f(x)| &\leq \mathbb{E}|f(Y_{n,x}) - f(x)| \\ &\leq \mathbb{E}\left(|f(Y_{n,x}) - f(x)|\mathbb{1}_{|Y_{n,x}-x|\leq\delta}\right) + \mathbb{E}\left(|f(Y_{n,x}) - f(x)|\mathbb{1}_{|Y_{n,x}-x|>\delta}\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(|f(Y_{n,x}) - f(x)|\mathbb{1}_{|Y_{n,x}-x|\leq\delta}\right) + 2M\mathbb{P}(|Y_{n,x} - x| > \delta).\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}(|Y_{n,x} - x| > \delta) \leq \frac{v_n(x)}{\delta^2}.$$

De plus, notant $\mathbb{P}_{Y_{n,x}}$ la loi de $Y_{n,x}$, on a

$$\mathbb{E}\left(|f(Y_{n,x}) - f(x)|\mathbb{1}_{|Y_{n,x}-x|\leq\delta}\right) = \int_{|y-x|\leq\delta} |f(y) - f(x)|\mathbb{P}_{Y_{n,x}}(dy) < \varepsilon.$$

On obtient donc

$$\left|\mathbb{E}\big(f(Y_{n,x})\big) - f(x)\right| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}v_n(x),$$

et v_n converge vers 0 quand $n \to \infty$, uniformément sur $[a, b]$, par hypothèse. On obtient donc que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, et pour tout $x \in [a, b]$,

$$\left|\mathbb{E}\big(f(Y_{n,x})\big) - f(x)\right| < 2\varepsilon,$$

c'est-à-dire que $\mathbb{E}\big(f(Y_{n,x}\big)$ converge vers $f(x)$, quand $n \to \infty$, uniformément sur $[a, b]$.

2) Introduisons $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0, 1]$. On a alors

$$\mathbb{E}(X_i) = x \quad \text{ et } \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) = x(1 - x).$$

Posons $Y_{n,x} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Alors $v_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} \to 0$, quand $n \to \infty$, uniformément sur $[0, 1]$ (car $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$). Donc, par 1), on a,

$$\mathbb{E}\big(f(Y_{n,x})\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

uniformément sur $[0, 1]$, ce qui s'écrit encore, car $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et x,

$$\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)C_n^k x^k(1 - x)^{n-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

uniformément sur $[0, 1]$.

Remarque : On a donc montré de façon probabiliste le théorème de Weierstrass d'approximation uniforme d'une fonction continue sur $[0, 1]$ par une suite de polynômes (polynômes de Bernstein).

Exercice 4. 1) On a $\mathrm{Re}\,\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\cos(tX))$. D'où,

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta (1 - \mathrm{Re}\,\varphi_X(t))dt = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (1 - \mathbb{E}(\cos(tX))dt = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \mathbb{E}(1 - \cos(tX))dt.$$

Comme $1 - \cos(tx) \geq 0$, on peut appliquer le théorème de Fubini, et on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta}\int_0^\delta (1 - \mathrm{Re}\,\varphi_X(t))dt &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X\neq0\}}\frac{1}{\delta}\int_0^\delta (1 - \cos(tX))dt\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X\neq0\}}\Big(1 - \frac{\sin(tX)}{\delta X}\Big)\right) \\ &= \mathbb{E}\big(g(\delta X)\big),\end{aligned}$$

car $g(0) = 0$.

2) Comme $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$, on a,

$$\int_{-\delta}^{\delta} (1 - \varphi_X(t))dt = 2 \int_0^{\delta} (1 - \operatorname{Re} \varphi_X(t))dt.$$

Alors par 1), on a, par positivité de g,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} (1 - \operatorname{Re} \varphi_X(t))dt &= \mathbb{E}\big(g(\delta X)\big) \\ &\geq \mathbb{E}\big(g(\delta X) \mathbb{1}_{\{|X| > \varepsilon\}}\big) \\ &\geq I_{\delta\varepsilon} \mathbb{P}(|X| > \epsilon), \end{aligned}$$

d'où l'inégalité demandée.

3) a) On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que la suite $(\varphi_{X_n}(t))_{n \geq 1}$ converge vers 1 pour tout $t \in [-\delta, \delta]$. Par la question précédente, on a

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{2 I_{\delta\varepsilon} \delta} \int_{-\delta}^{\delta} |1 - \varphi_{X_n}(t)| dt.$$

Or, $\lim_{n \to \infty} |1 - \varphi_{X_n}(t)| = 0$ pour $t \in [-\delta, \delta]$, et $|1 - \varphi_{X_n}(t)| \leq 2$, alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 0,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, X_n converge en probabilité vers 0.

b) Si X_n converge en loi vers 0, alors $\varphi_{X_n}(t) \to_{n \to \infty} 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc à fortiori pour tout $t \in [-\delta, \delta]$. Réciproquement, par a), X_n converge en probabilité vers 0, et donc à fortiori en loi.

4) a) Soit $m < n$. On a

$$\mathbb{P}(|S_n - S_m| > \varepsilon) \leq \frac{1}{2 I_{\delta\varepsilon} \delta} \int_{-\delta}^{\delta} |1 - \varphi_{S_n - S_m}(t)| dt.$$

L'indépendance des v.a. X_k impliquant l'indépendance des v.a. S_m et $S_n - S_m$, on a

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{S_m + S_n - S_m}(t) = \varphi_{S_m}(t) \varphi_{S_n - S_m}(t),$$

et donc

$$\varphi_{S_m}(t) - \varphi_{S_n}(t) = \varphi_{S_m}(t)(1 - \varphi_{S_n - S_m}(t)).$$

Or, S_m converge en loi vers S, donc $\lim_m \varphi_{S_m}(t) = \varphi_S(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et comme $\varphi_S(0) = 1$, par continuité on a que $\varphi_{S_m}(t)$ converge vers 1 pour tout t dans un voisinage $[-\delta, \delta]$ de 0. Alors, comme $|\varphi_{S_m}| \leq 1$, on choisit N tel que $|\varphi_{S_m}(t)| \geq \frac{1}{2}$ dès que $m \geq N$, pour tout $t \in [-\delta, \delta]$. Donc, pour $n > m \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi_{S_m}(t) - \varphi_{S_n}(t)| &= |\varphi_{S_m}(t)| \, |(1 - \varphi_{S_n - S_m}(t))| \\ &\geq \frac{1}{2} |(1 - \varphi_{S_n - S_m}(t))|. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathbb{P}(|S_n - S_m| > \varepsilon) \leq \frac{1}{I_{\delta\varepsilon} \delta} \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi_{S_n} - \varphi_{S_m}(t)| dt.$$

Or, $\lim_{n,m} |\varphi_{S_n} - \varphi_{S_m}(t)| = 0$, et $|\varphi_{S_n} - \varphi_{S_m}(t)| \leq 2$, donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient

$$\lim_{n,m} \mathbb{P}(|S_n - S_m| > \varepsilon) = 0,$$

c'est-à-dire S_n est une suite de Cauchy pour la convergence en probabilité.

b) Par la question précédente, la suite S_n est de Cauchy pour la convergence en probabilité. Par l'indication, on peut donc extraire une sous-suite n_j telle que S_{n_j} converge vers S quand $j \to \infty$. Alors, comme

$$\{|S_n - S| > \varepsilon\} \subset \left\{|S_n - S_{n_j}| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|S_{n_j} - S| > \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

on a,

$$\mathbb{P}(|S_n - S| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}\Big(|S_n - S_{n_j}| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) + \mathbb{P}\Big(|S_{n_j} - S| > \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

La convergence en probabilité de S_n résulte alors du fait qu'elle soit de Cauchy, et de la convergence en probabilité de S_{n_j} vers S.